**Soient deux entiers naturels non nuls $a$ et $b$, avec $a > b$.**

**Sachant $\begin{cases} a - b = 2 \\ a^5 - b^5 = 2882 \end{cases}$, déterminer $a$ et $b$.**

*Remarques* :

On sait que $(a + b)^n = \sum_{p=0}^{n} a^{n-p}.b^p$ d'où $(a - b)^n = \sum_{p=0}^{n} a^{n-p}.(-b)^p$ .

Dans $(a - b)^n$ il y a alternance des signes des monômes successifs, ce qui n'est pas le cas dans $(a + b)^n$ .

Cela donne l'idée que, par addition de $(a + b)^n$ et $(a - b)^n$ les termes se détruiront de 2 en 2 .

Ainsi $\begin{cases} (a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\ (a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5 \end{cases}$ .

Par addition : $(a + b)^5 - (a - b)^5 = 2(5a^4b + 10a^2b^3 + b^5)$. (1)

Pour utiliser cette propriété, comme $a = b + 2$ , nommons $x$ l'entier entre $a$ et $b$ , soit $x = \dfrac{a+b}{2}$ .

On peut donc utiliser $a = x + 1$ et $b = x - 1$ .

$a^5 - b^5 = (x + 1)^5 - (x - 1)^5 = 2(5x^4 + 10x^2 + 1) = 2882$ , d'après (1) .

On déduit : $5x^4 + 10x^2 + 1 = 1441$ , soit $5x^4 + 10x^2 - 1440 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 - 288 = 0$.

Soit $X = x^2$ : $X^2 + 2X - 288 = 0 \Rightarrow X_1 = 16$ et $X_2 = -18$ (impossible).

$X = x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$ .

On déduit $a = 5$ et $b = 3$ .