**Soit la fonction $f$ telle que $f(x) = e^{1/x}$ .**

**On veut faire l'étude de la fonction $f$ , et tracer sa courbe représentative $C_f$ .**

**a) Déterminer son domaine de définition et ses limites aux bornes du domaine (Bien distinguer les deux côtés de $x = 0$).**

$e^A$ est partout défini, sous réserves que $A$ le soit, or $A = \frac{1}{x}$ n'est défini que si $x \neq 0$ , donc $D_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ .

*Limites aux bornes du domaine*

Si $x \to -\infty$ , alors $\frac{1}{x} \to 0^-$ , d'où $e^{1/x} \to 1^-$ . On déduit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1^-$ (asymptote horizontale $y = 1$ ).

Si $x \to +\infty$ , alors $\frac{1}{x} \to 0^+$ , d'où $e^{1/x} \to 1^+$ . On déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1^+$ (asymptote horizontale $y = 1$ ).

Si $x \to 0^-$ , alors $\frac{1}{x} \to -\infty$ , d'où $e^{1/x} \to 0^+$ . On déduit $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ (un prolongement par continuité est possible).

On peut poser $f(0) = 0$ , ce qui assure d'une continuité de $f$ à gauche en $0$ .

Si $x \to 0^+$ , alors $\frac{1}{x} \to +\infty$ , d'où $e^{1/x} \to +\infty$ . On déduit $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ (asymptote verticale $x = 0$ , seulement du côté positif de 0).

**b) Expliquer pourquoi un *prolongement par continuité* est possible en $x = 0$ .**

Voir les remarques précédentes. Le nouveau domaine est $D = \mathbb{R}$ , avec une discontinuité à droite en $x = 0$ .

**c) Etudier les variations de la fonction $f$ .**

$f = e^u \Rightarrow f' = u'.e^u$ , avec $u = \frac{1}{x} \Rightarrow u' = -\frac{1}{x^2}$ . On déduit $f'(x) = -\frac{1}{x^2}.e^{1/x}$ .

La dérivée $f'(x)$ est partout négative, donc $f$ partout décroissante, avec une « cassure » en $x = 0$ , du côté droit.

**d) Etudier avec précision la pente de la tangente à $C_f$ en $x = 0$ .**

Du côté droit de $0$ , l'asymptote verticale fait que la tangente à $C_f$ devient verticale en se rapprochant de $0^+$ .

Du côté gauche de $0$ , $f$ est décroissante, jusqu'à rejoindre l'origine des axes, puisqu'on a posé $f(0) = 0$ .

Il faut préciser avec quelle pente se fait la jonction avec l'origine.

<u>1ère méthode</u> : *Glissement de tangente* : Soit $x < 0$ , proche de $0$ .

La tangente à $C_f$ en $x$ a pour coefficient directeur (pente) $f'(x)$ .

Plus $x$ se rapproche de $0^-$ , plus la pente de cette tangente, que l'on glisse le long de la courbe, se rapproche de la valeur $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = -\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2}.e^{1/x}$ indéterminé de forme $\infty \times 0$ ( $\frac{1}{x^2} \to +\infty$ et $\frac{1}{x} \to -\infty \Rightarrow e^{1/x} \to 0$).

Posons $X = \frac{1}{x}$ , qui tend vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $0^-$ .

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2}.e^{1/x} = \lim\limits_{X \to -\infty} \frac{e^X}{X^2} = 0$ (on sait qu'aux infinis, la croissance de $e^x$ est infiniment plus rapide que celle de toute puissance <u>positive</u> de $X$ ). Ainsi $\lim\limits_{X \to -\infty} \frac{e^X}{X^2} = \lim\limits_{X \to -\infty} \frac{e^X}{X} = \lim\limits_{X \to -\infty} \frac{e^X}{\sqrt{X}} = 0$ ( $\sqrt{X} = X^{1/2}$ ).

On déduit $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = 0$ , la courbe admet une tangente horizontale en $x = 0^-$ .

2$^{\text{ème}}$ méthode : *Limite de sécante passant par l'origine O* : Soit $M$ point de $C_f$, d'abscisse $x < 0$, proche de 0 .

La pente de la sécante $(OM)$ est $p = \dfrac{y_M - y_O}{x_M - x_O} = \dfrac{e^{1/x} - 0}{x - 0} = \dfrac{1}{x}.e^{1/x}$ .

$\lim\limits_{x \to 0^-} p = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x}.e^{1/x}$, indéterminé de forme $\infty \times 0$ .

Posons $X = \dfrac{1}{x}$, qui tend vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $0^-$. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x}.e^{1/x} = \lim\limits_{X \to -\infty} \dfrac{e^X}{X} = 0$ .

On obtient même résultat. La pente de la tangente en $x = 0$ est nulle, du côté négatif de $0$ .

*Les deux méthodes donnent le même résultat dans la quasi-totalité des cas, sauf si f' (dérivée) n'est pas continue en 0 .*

*Méthode par les tangentes*


*Méthode par les sécantes*

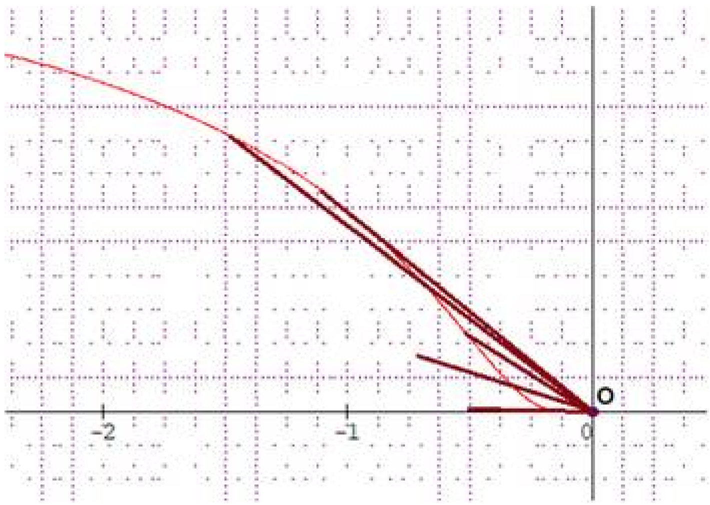


*Tableau de variations*

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | \|\| | $-$ | |
| $f(x)$ | 1 ↘ | 0 | \|\| | $+\infty$ ↘ | 1 |

**e) Déterminer les coordonnées du point d'inflexion de la courbe.**

Les points d'inflexion (changement de courbure, passage de concave à convexe, croisement de la tangente) , sont les points où la dérivée seconde $f''$ s'annule.

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.e^{1/x} = -x^{-2}.e^{1/x} \Rightarrow f''(x) = -[(-2x^{-3}).e^{1/x} + x^{-2}.(-\frac{1}{x^2}.e^{1/x})] = \frac{2}{x^3}.e^{1/x} + \frac{1}{x^4}.e^{1/x} = \frac{2x+1}{x^4}.e^{1/x}$ .

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0$ , soit $x = -\frac{1}{2}$ , avec $y = f(-\frac{1}{2}) = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ . Le point d'inflexion est $B( -\frac{1}{2} ; \frac{1}{e^2} )$ .

$x < -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x + 1 < 0$ , soit $f''(x) < 0$ . La courbe est *concave* (courbure vers le bas).

$x > -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x + 1 > 0$ , soit $f''(x) > 0$ . La courbe est *convexe* (courbure vers le bas).

**f) Tracer la courbe $C_f$ .**