On considère la suite u définie par $\begin{cases} u_1 = 4\ ,\ u_2 = 14 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$, pour tout entier naturel $n > 0$.

Montrer par récurrence que $u_n = 2\times3^n - 2^n$.

Soit la proposition de récurrence P_n : « $u_n = 2\times3^n - 2^n$ » .

On remarque que la relation de récurrence $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ est à deux termes, ce qui signifie que l'on doit connaître la valeur de deux termes consécutifs de la suite, pour connaître le suivant.

Dans l'initialisation, il faudra donc démontrer P_1 et P_2 vrais, afin d'amorcer le calcul de u_3 et des termes suivants.

Dans l'hérédité, il faudra supposer P_n et P_{n+1} vrais, pour démontrer que P_{n+2} vrai.

a) *Initialisation*

$u_1 = 4 = 2\times3^1 - 2^1 = 6 - 2$, donc P_1 est vraie.

$u_2 = 14 = 2\times3^2 - 2^2 = 18 - 4$, donc P_2 est vraie.

b) *Hérédité*

Supposons P_k et P_{k+1} vraies ($u_k = 2\times3^k - 2^k$ et $u_{k+1} = 2\times3^{k+1} - 2^{k+1}$).

Peut-on en déduire P_{k+2} vraie ($u_{k+2} = 2\times3^{k+2} - 2^{k+2}$), sous réserves de P_k et P_{k+1} vraies ?

$u_{k+2} = 5u_{k+1} - 6u_k = 5(2\times3^{k+1} - 2^{k+1}) - 6(2\times3^k - 2^k) = (10\times3^{k+1} - 12\times3^k) - (5\times2^{k+1} - 6\times2^k)$,

$u_{k+2} = (10\times3^{k+1} - 4\times3^{k+1}) - (5\times2^{k+1} - 3\times2^{k+1}) = 6\times3^{k+1} - 2\times2^{k+1} = 2\times3^{k+2} - 2^{k+2}$, résultat attendu.

c) *Conclusion* : P_n est vraie pour tout entier naturel $n > 0$.

En déduire la limite de la suite u .

$u_n = 2\times3^n - 2^n = 3^n\left[2 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$, avec $\lim\limits_{n \to +\infty} (3^n) = +\infty$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

On conclue : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[2 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = 2$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

***Variante 1 ne nécessitant pas la connaissance du résultat* $u_n = 2\times3^n - 2^n$:**

Recherchons les suites géométriques solutions de la relation de récurrence $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

Soit une suite géométrique v telle que $v_n = v_1.q^{n-1}$, avec $v_1 \neq 0$,solution de cette relation :

$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \Leftrightarrow v_1.q^{n+1} = 5v_1.q^n - 6\ v_1.q^{n-1} \Leftrightarrow q^2 = 5q - 6 \Leftrightarrow q^2 - 5q + 6 = 0$, après simplification par $v_1.q^{n-1}$.

$q^2 - 5q + 6 = 0$ admet $q_1 = 3$ et $q_2 = 2$ comme solution.

On peut vérifier que toute suite u telle que $u_n = a.3^n + b.2^n$, avec a et b réels est solution de $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

Déterminons a et b , sachant que $u_1 = 4$ et $u_2 = 14$.

$u_n = a.3^n + b.2^n \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 3a + 2b = 4 \\ u_2 = 9a + 4b = 14 \end{cases}$, de solution $(a\ ;b) = (2\ ;-1)$.

La suite u solution de $\begin{cases} u_1 = 4\ ,\ u_2 = 14 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$ est telle que $u_n = 2\times3^n - 2^n$, pour tout n entier naturel non nul.

***Variante 2 ne nécessitant pas la connaissance du résultat* $u_n = 2\times3^n - 2^n$:**

$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \Leftrightarrow u_{n+2} - 2u_{n+1} = 3u_{n+1} - 6u_n = 3(u_{n+1} - 2u_n)$.

Posons $v_n = u_{n+1} - 2u_n$.

$u_{n+2} - 2u_{n+1} = 3(u_{n+1} - 2u_n)$ devient $v_{n+1} = 3.v_n$.

La suite v est géométrique, de raison $q = +3$, de premier terme $v_1 = u_2 - 2u_1 = 14 - 8 = 6$.

On déduit $v_n = v_1.q^{n-1} = 6\times3^{n-1} = 2\times3^n$, donc $u_{n+1} - 2u_n = 2\times3^n$.

Soit la suite w telle que $u_n = 2^n.v_n$.

$u_{n+1} - 2u_n = 2\times3^n \Leftrightarrow 2^{n+1}.v_{n+1} - 2\times2^n.v_n = 2\times3^n \Leftrightarrow 2^{n+1}(v_{n+1} - v_n) = 2\times3^n$.

On déduit : $v_{n+1} - v_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Le choix de $u_n = 2^n.v_n$ avait pour but d'obtenir une suite avec le même coefficient sur $v_{n=1}$ et v_n , pour que les termes de cette expression s'éliminent par addition.

$v_n - v_{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$,

$v_{n-1} - v_{n-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$,

$v_{n-2} - v_{n-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-3}$,

……………………..

$v_3 - v_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$,

$v_2 - v_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^1$.

--------------------------- Par addition en colonne, on obtient :

$v_n - v_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-3} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

A droite on a la somme de $n - 1$ termes d'une suite géométrique, de 1er terme $a = \frac{3}{2}$, de raison $q = \frac{3}{2}$.

Cette somme est égale à $a.\frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} = \frac{3}{2}.\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{3}{2}} = 3\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 3$.

$v_n - v_1 = 3\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 3$, avec $u_n = 2^n.v_n$, soit $v_n = \frac{1}{2^n}.u_n$.

$\frac{1}{2^n}.u_n - \frac{1}{2}.u_1 = 3\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2^n}.u_n - 2 = 3\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2^n}.u_n = 3\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{u_n = 2\times3^n - 2^n}$.