On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = e^x - x$.

<u>Partie A</u> : Définition d'une suite.

1/ Etudier les variations de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.

f est définie, continue et dérivable sur $[0\,;+\infty[$, comme somme de fonctions définies, continues et dérivables sur cet intervalle.

Valeur et limite aux bornes du domaine :

$f(0) = e^0 - 0 = 1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ est indéterminé, de type $\infty - \infty$.

Levons l'indétermination : $f(x) = x.(\dfrac{e^x}{x} - 1)$. sachant $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, on déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Dérivée : $f(x) = e^x - x \Rightarrow f'(x) = e^x - 1$.

$f(0) = e^0 - 1 = 0$.

$x > 0 \Rightarrow e^x > e^0$, soit $e^x > 1$ et $f'(x) = e^x - 1 > 0$. La fonction est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2/ Soit n un entier naturel non nul.

Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une solution unique sur $[0\,;+\infty[$, que l'on notera α_n .

f est continue et strictement croissante, telle que $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

f établit une <u>*bijection*</u> de $[0\,;+\infty[$ sur $[0\,;+\infty[$, ce qui signifie que tout $y \geq 0$ admet un et un seul antécédent $x \geq 0$, tel que $f(x) = y$ (variante du théorème de la valeur intermédiaire).

Il existe bien un et un seul $\alpha_n > 0$ tel que $f(\alpha_n) = n$, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.

3-a) Donner la valeur exacte de α_1 .

Nous avons vu $f(0) = 1$, or α_1 étant unique, on déduit $\alpha_1 = 0$.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α_2 et α_3 .

A la calculatrice : $\begin{cases} g(\alpha_2) = f(\alpha_2) - 2 = 0 \Rightarrow 1{,}13 < \alpha_2 < 1{,}15 \text{ , soit } \alpha_2 = 1{,}14 \\ h(\alpha_3) = f(\alpha_3) - 3 = 0 \Rightarrow 1{,}50 < \alpha_3 < 1{,}52 \text{ , soit } \alpha_3 = 1{,}51 \end{cases}$.

<u>Partie B</u> : Etude de la suite (α_n) .

1/ Montrer que la suite (α_n) est croissante.

La fonction f est strictement croissante, donc <u>conserve les ordres</u> :

$f(\alpha_{n+1}) = n + 1$ et $f(\alpha_n) = n \Rightarrow f(\alpha_{n+1}) > f(\alpha_n)$, ce qui implique $\alpha_{n+1} > \alpha_n$.

2/ Déterminer sa limite en $+\infty$.

On sait $f(\alpha_n) = n$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} f(\alpha_n) = +\infty$.

La fonction f étant continue, strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, telle que $f(0) = 1$, cette limite n'est atteignable que dans l'éventualité où $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = +\infty$.

<u>*Démonstration rigoureuse*</u> :

Montrons que (α_n) strictement croissante ne peut admettre de majorant A .

Raisonnons par l'absurde : Soit un réel A tel que $\alpha_n < A$, pour tout entier n .

L'image $f(A)$ est un réel donné et fixe, que l'on peut encadrer par deux entiers consécutifs p et $p + 1$.

$$p \leq f(A) < p + 1 \;\Rightarrow\; f(\alpha_p) \leq f(A) < f(\alpha_{p+1}) .$$

f étant strictement croissante, on déduit : $\alpha_p \leq A < \alpha_{p+1}$, ce qui est en contradiction avec (α_n) majorée par A .

La suite (α_n) strictement croissante et non majorée, est donc divergente vers $+\infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = +\infty$.

3/ Montrer que $\dfrac{e^{\alpha_n}}{n}$ tend vers 1 en $+\infty$.

$f(\alpha_n) = n \;\Leftrightarrow\; e^{\alpha_n} - \alpha_n = n \;\Leftrightarrow\; 1 - \dfrac{\alpha_n}{e^{\alpha_n}} = \dfrac{n}{e^{\alpha_n}}$, après division par $e^{\alpha_n} \neq 0$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = +\infty$, posons $X = \alpha_n$ avec X tendant vers $+\infty$.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{\alpha_n}}{\alpha_n} = \lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty \text{ , d'où : } \lim_{n \to +\infty} \frac{\alpha_n}{e^{\alpha_n}} = 0 \; .$$

$$1 - \frac{\alpha_n}{e^{\alpha_n}} = \frac{n}{e^{\alpha_n}} \;\Rightarrow\; 1 - \left(\lim_{n \to +\infty} \frac{\alpha_n}{e^{\alpha_n}}\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{e^{\alpha_n}} \text{ , d'où } \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{e^{\alpha_n}} = 1 \; .$$

En prenant l'inverse, on déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^{\alpha_n}}{n} = 1$.

Remarque :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^{\alpha_n}}{n} = 1$ signifie que $e^{\alpha_n} \approx n$ lorsque n est suffisamment grand.

On sait : $e^a = b \;\Leftrightarrow\; a = \ln(b)$, d'où : $\alpha_n \approx n$ lorsque n est suffisamment grand.

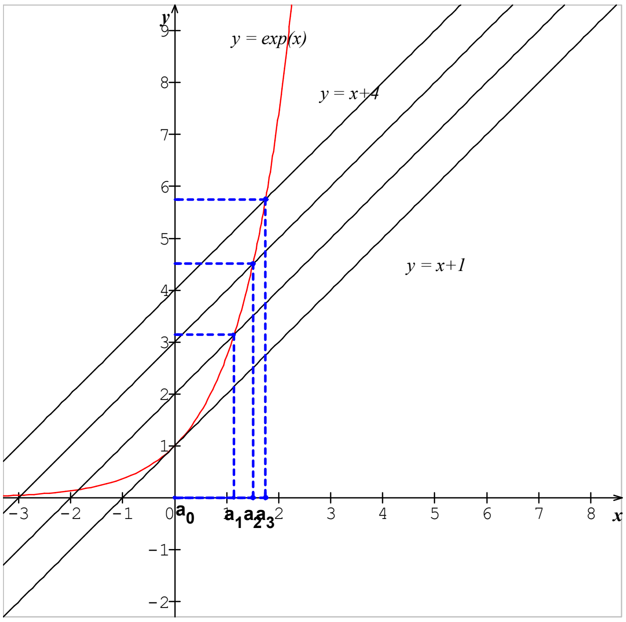
La convergence est assez lente car on constate à la calculatrice que :

$\alpha_{50} \approx 3{,}99$	$\ln(50) \approx 3{,}91$
$\alpha_{100} \approx 4{,}65$	$\ln(100) \approx 4{,}60$
$\alpha_{500} \approx 6{,}23$	$\ln(500) \approx 6{,}21$
$\alpha_{1000} \approx 6{,}91$	$\ln(1000) \approx 6{,}908$.

Explication graphique :

1/ $f(x) = n \Leftrightarrow e^x = x + n$.

Les racines α_n (notées a_n sur le graphique, sont les abscisses d'intersection de $y = e^x$ avec $y = x + n$.



2/ $f(x) = n \Leftrightarrow e^x - x = n$.

Les racines α_n (notées a_n sur le graphique, sont les abscisses d'intersection de $y = e^x - x$ avec $y = n$.