<u>Partie A</u> :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

1/ R.O.C. : Démontrer que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$.

On sait que $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, soit $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$.

En conséquence : $exp'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - e^0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h}$.

Comme $exp'(x) = exp\,(x) = e^x$, on déduit : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = exp'(0) = e^0 = 1$.

En déduire la limite de la fonction f en 0 .

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}} = \frac{1}{1} = 1 .$$

On remarquera que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{0}{e^0 - 1} = \dfrac{0}{0}$ *était une forme indéterminée.*

2/ Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

On sait $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x - 1}$ est une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Levons l'indétermination : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^x - 1}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{\left(\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}\right) - \left(\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}\right)} = \dfrac{1}{\infty - 0} = 0$.

La courbe C_f présente une asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$.

<u>Partie B</u> :

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier $n \geq 1$ par : $u_n = \dfrac{1}{n}\,(1 + e^{1/n} + e^{2/n} + \ldots + e^{(n-1)/n}) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{p=0}^{n-1} e^{p/n}$.

1/ Démontrer que $1 + e^{1/n} + e^{2/n} + \ldots + e^{(n-1)/n} = \dfrac{1 - e}{1 - e^{1/n}}$, soit $\sum\limits_{p=0}^{n-1} e^{p/n} = \dfrac{1 - e}{1 - e^{1/n}}$.

$q = e^{1/n} \;\Rightarrow\; q^p = e^{p/n}$.

On sait que $q \neq 1 \;\Rightarrow\; 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$, or $\dfrac{1}{n} \neq 0 \;\Rightarrow\; e^{1/n} \neq 1$.

$1 + e^{1/n} + e^{2/n} + \ldots + e^{(n-1)/n} = \dfrac{1 - e^{n/n}}{1 - e^{1/n}} = \dfrac{1 - e^1}{1 - e^{1/n}} = \dfrac{1 - e}{1 - e^{1/n}}$.

2/ En déduire que $u_n = (e-1).f\left(\frac{1}{n}\right)$.

On a vu au B-1 que $1 + e^{1/n} + e^{2/n} + \ldots + e^{(n-1)/n} = \dfrac{1-e}{1-e^{1/n}}$.

Par ailleurs $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \dfrac{\frac{1}{n}}{e^{1/n}-1} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{e^{1/n}-1}$.

$$u_n = \frac{1}{n}\left(1 + e^{1/n} + e^{2/n} + \ldots + e^{(n-1)/n}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{1-e}{1-e^{1/n}} = \frac{1}{n} \times \frac{e-1}{e^{1/n}-1} = (e-1) \times \frac{1}{n} \times \frac{1}{e^{1/n}-1} = (e-1).f\left(\frac{1}{n}\right) .$$

3/ Calculer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = (e-1).\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = (e-1).\lim\limits_{h \to 0} f(h)$ en posant $h = \dfrac{1}{n}$.

On a vu que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(h) = 1$, dont on déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = (e-1).\lim\limits_{h \to 0} f(h) = e - 1$.