$ABCD$ est un tétraèdre, E le milieu de $[AC]$, G le centre de gravité du triangle BCD , et K le point tel que :
$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

1/ Déterminer une représentation paramétrique de la droite (GE) dans le repère $(A\ ,\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

Dans ce repère : $A(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$, $D(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$.

$$E \text{ milieu de } [AC] \Rightarrow \begin{cases} x_E = \dfrac{x_A + x_C}{2} \\ y_E = \dfrac{y_A + y_C}{2} \\ z_E = \dfrac{z_A + z_C}{2} \end{cases} \text{, soit } E(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 0).$$

***Mémorisation* : I milieu de $[AB]$, 2 points , $\frac{1}{2}$ des coordonnées.**

$$G \text{ centre de gravité de } ABC \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases} \text{, soit } G(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}).$$

***Mémorisation* : G centre de gravité de ABC , 3 points , $\frac{1}{3}$ des coordonnées.**

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow K(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$.

$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (GE) \Leftrightarrow$ il existe k réel tel que $\overrightarrow{GM} = t.\overrightarrow{GE}$ ou $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{AG} + t.\overrightarrow{GE}$.

$\overrightarrow{GE}(x_E - x_G\ ;\ y_E - y_G\ ;\ z_E - z_G) = (-\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{6}\ ;\ -\frac{1}{3})$, vecteur directeur de (GE).

On peut aussi bien prendre un multiple de $\overrightarrow{GE}$ comme vecteur directeur, seule la direction compte.
Soit, par exemple $\overrightarrow{u}(2\ ;\ -1\ ;\ 2)$, vecteur directeur de (GE) :

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (GE) \Leftrightarrow \text{il existe } k \text{ réel tel que } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + k.\overrightarrow{u} \Leftrightarrow (GE) \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} + 2k \\ y = \dfrac{1}{3} - k \\ z = \dfrac{1}{3} + 2k \end{cases} \text{, } \forall k \in \mathbb{R} .$$

Remarque : Une même droite $D_{A\ ;\ \overrightarrow{u}}$ admet des infinités d'équations paramétriques, selon le choix du point A par lequel passe la droite, et le vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, défini à un multiple près.

Prouver l'alignement des points K , E et G .

1ère Méthode : Vérifier que $\overrightarrow{GK} = k\overrightarrow{GE}$.

$\overrightarrow{GE} = (-\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{6}\ ;\ -\frac{1}{3})$ et $\overrightarrow{GK} = (\frac{2}{3}\ ;\ -\frac{1}{3}\ ;\ \frac{2}{3})$. On constate $\overrightarrow{GK} = -2\overrightarrow{GE}$, d'où l'alignement cherché.

2ème Méthode : Vérifier s'il existe une valeur de k telles que K vérifie l'équation de (GE) .

$$\begin{cases} x_K = \dfrac{1}{3} + 2k \\ y_K = \dfrac{1}{3} - k \\ z_K = \dfrac{1}{3} + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3} + 2k = 1 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} - k = 0 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} + 2k = 1 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{3} \end{cases} \text{. Les résultats sont compatibles, d'où l'alignement.}$$

2/ Le point $F(\frac{2}{3} ; 0 ; 0)$ appartient-il à la droite (GE) ?

<u>1ère Méthode</u> : $\overrightarrow{GF} = (\frac{1}{3} ; -\frac{1}{3} ; -\frac{1}{3})$, $\overrightarrow{GE} = (-\frac{1}{3} ; \frac{1}{6} ; -\frac{1}{3})$. les composantes en x imposent $k = -1$, et celles en z , $k = +1$.

Il y a incompatibilité, donc F n'appartient pas à (GE) .

<u>2ème Méthode</u> : $F(\frac{2}{3} ; 0 ; 0) \in (GE) \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = \frac{1}{3} + 2k \\ y_F = \frac{1}{3} - k \\ z_F = \frac{1}{3} + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} + 2k = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \boldsymbol{k = +\frac{1}{6}} \\ \frac{1}{3} - k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} + 2k = 0 \Leftrightarrow k = \boldsymbol{-\frac{1}{6}} \end{cases}$.

Il y a incompatibilité, donc F n'appartient pas à (GE) .