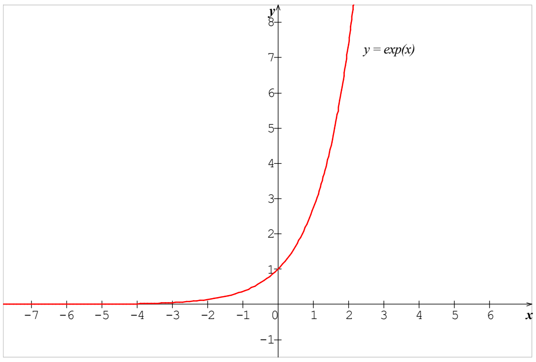
Déterminer les limites suivantes :

Il est nécessaire de connaître la courbe représentative de $f(x) = e^x$ *, afin de mémoriser* $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \end{cases}$.



a) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x^4}}{x^2}$.

Attention : Ne pas confondre $e^{x^4} = e^{(x^4)}$ *avec* $(e^x)^4 = e^{4x}$.

Si $x \longrightarrow -\infty$ $\begin{cases} x^4 \longrightarrow +\infty \text{ et } e^{x^4} \longrightarrow +\infty \\ x^2 \longrightarrow +\infty \end{cases}$. On est en présence d'une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

On doit savoir que :

En cas d'indétermination aux bornes de son domaine, la fonction exponentielle « l'emporte » sur toutes les puissances de x .

Cette expression n'est pas considérée comme un preuve, et on doit toujours se ramener aux deux formules autorisées suivantes, quitte à devoir faire un changement de variable pour les mettre en évidence :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x.e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \end{cases} .$$

$$\frac{e^{x^4}}{x^2} = \frac{e^{x^4}}{x^4} \times x^2 .$$

On pose $X = x^4$, d'où $X \longrightarrow +\infty$ lorsque $x \longrightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x^4}}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x^4}}{x^4} \times \lim_{x \to -\infty} x^2 = \boldsymbol{\lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X}} \times \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \quad \text{puisque} \quad \lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$$

b) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

Sachant $e^{2x} = (e^x)^2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ est de forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

Comme on le ferait avec une puissance x^2 , factorisons e^{2x} au numérateur et au dénominateur, afin de lever l'indétermination.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}(1-\frac{1}{e^{2x}})}{e^{2x}(1+\frac{1}{e^{2x}})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}} = 1 \text{ , sachant que } \lim_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0 \text{ .}$$

Il est souhaitable de s'habituer à raisonner à l'identique, mais en écrivant $\frac{1}{e^{2x}} = e^{-2x}$, soit :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}(1-e^{-2x})}{e^{2x}(1+e^{-2x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1 \text{ , sachant que } \lim_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0 \text{ .}$$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x)$ **.**

On est en présence d'une forme indéterminée $\infty - \infty$. Il faut faire apparaître $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

$$e^x - x = x(\frac{e^x}{x} - 1) \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} (e^x - x) = \left(\lim_{x \to +\infty} x\right) \times \left[\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}\right) - 1\right] \text{ avec } \lim_{x \to +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ .}$$

On conclue : $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x) = +\infty$.

On pouvait conjecturer ce résultat qui mesure la limite de l'écart algébrique entre les courbes représentatives des fonctions $y = x$ *(dessous) et* $y = e^x$ *(dessus). Or la croissance de* e^x *est infiniment plus rapide que celle de* $y = x$.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{1 + e^x}$ **.**

Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise e^x au numérateur et au dénominateur :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x-1}{1+e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(e^{-x}+1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1-e^{-x}}{e^{-x}+1} = 1 \text{ , puisque } \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \text{ .}$$