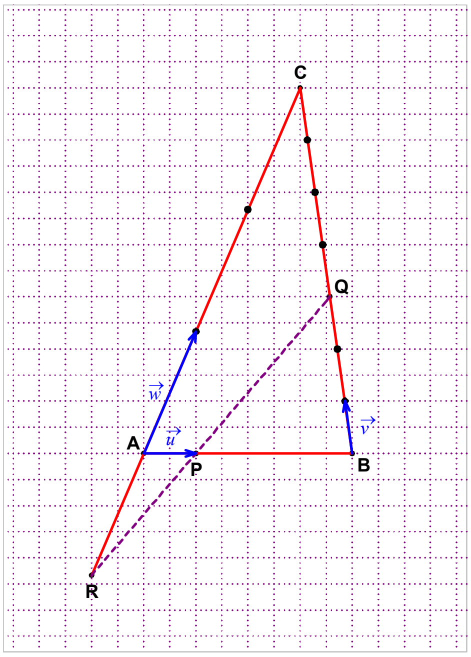
Sur le triangle ABC ci-dessous, les subdivisions des côtés sont régulières.



Les points P, Q, R appartiennent respectivement aux droites (AB), (BC) et (AC).

1/ Déterminer par lecture graphique les réels x, y, z tels que $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BQ} = y\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AR} = z\overrightarrow{AC}$.

A, P, B sont alignés, $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AB}$ de même sens, d'où $x > 0$. On constate $\overrightarrow{AB} = 4\,\vec{u}$ et $\overrightarrow{AP} = \vec{u}$.

On déduit : $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, soit $x = +\frac{1}{4}$.

B, Q, C sont alignés, $\overrightarrow{BQ}$ et $\overrightarrow{BC}$ de même sens, d'où $y > 0$. On constate $\overrightarrow{BQ} = 3\,\vec{v}$ et $\overrightarrow{BC} = 7\,\vec{v}$.

On déduit : $\overrightarrow{BQ} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$, soit $y = +\frac{3}{7}$.

A, R, C sont alignés, $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AC}$ de <u>sens contraires</u>, d'où $z < 0$. On constate $\overrightarrow{AR} = -\,\vec{w}$ et $\overrightarrow{AC} = 3\,\vec{w}$.

On déduit : $\overrightarrow{AR} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, soit $z = -\frac{1}{3}$.

2/ Exprimer le vecteur $\overrightarrow{PR}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AR} = -\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR} = -\overrightarrow{AP} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

3/ Vérifier que : $\overrightarrow{PQ} = \frac{9}{28}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BQ} = -\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} - \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC} = (-\frac{1}{4} + 1 + \frac{3}{7})\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC} = \frac{9}{28}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}.$$

4/ En déduire que les points P, Q et R sont alignés.

$$\overrightarrow{PQ} = (\frac{9}{28}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}) = -\frac{9}{7}(-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}) = -\frac{9}{7}\overrightarrow{PR}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont colinéaires, d'où l'alignement des points P, Q et R.