Soit la suite u définie par $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{4}{3}$ et , pour tout entier naturel n , par $u_{n+2} = \frac{5}{3} u_{n+1} - \frac{4}{9} u_n$.

a) Démontrer par récurrence que $u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ pour tout entier naturel n .

La relation de récurrence est *à deux termes*, (u_{n+2} est calculé à partir de u_{n+1} <u>et</u> u_n) .

Soit la proposition de récurrence P_n : $u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$, pour tout entier naturel n .

1° <u>*Initialisation*</u> : Vérifions que P_0 et P_1 sont vraies : $u_0 = 1 = \left(\frac{4}{3}\right)^0$, et $u_1 = \frac{4}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^1$.

2° <u>*Hérédité*</u> : Supposons $(P_n \,;\, P_{n+1})$ vraies. Peut-on en déduire P_{n+2} vraie ?

"P_n vraie" signifie $u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ et "P_{n+1} vraie" signifie $u_{n+1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}$.

$$u_{n+2} = \frac{5}{3} u_{n+1} - \frac{4}{9} u_n = \frac{5}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} - \frac{4}{9}\left(\frac{4}{3}\right)^n = \frac{5}{3^1}\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} - \frac{4}{3^2}\left(\frac{4}{3}\right)^n = \frac{5\times(4^{n+1})}{3^{n+2}} - \frac{4^{n+1}}{3^{n+2}} = \frac{4\times(4^{n+1})}{3^{n+2}} = \frac{4^{n+2}}{3^{n+2}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n+2} .$$

On constate que P_{n+2} est vraie , *sous réserves* que P_n et P_{n+1} le soient.

3° <u>*Conclusion*</u> : On conclue que P_n est vraie pour tout entier naturel n .

b) Déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Si $n \to +\infty$, $\left(\frac{4}{3}\right)^n = u_n \to +\infty$, ce que confirme le fait que u soit une *suite géométrique* de raison $q = \frac{4}{3}$,

donc telle que $|\, q \,| > 1$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$.