Soit C la courbe représentative de la fonction $f : x \to f(x) = x^2$, dans un repère orthonormé.

Soit le point $A(1 ; -\frac{1}{4})$. Montrer que les tangentes à C passant par A sont perpendiculaires entre elles.

L'équation de la tangente à la courbe C_f en A d'abscisse a est : $T_a \mid y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$, soit $T_a \mid y = 2a(x - a) + a^2$, ou encore : $T_a \mid y = 2ax - a^2$.

Les deux tangentes T_a qui passent par $A(1 ; -\frac{1}{4})$ doivent vérifier : $-\frac{1}{4} = 2a\times 1 - a^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a - \frac{1}{4} = 0$.

Remarque 1 :

$ax^2 + bx + c = 0$ telle que a et c soient de signe contraires admet toujours des racines.

$a^2 - 2a - \frac{1}{4} = 0$ admet donc deux racines a' et a'', ce qui prouve que quelle que soit l'abscisse a du point A , il existe des tangentes à C passant par A (la courbe C , qui est une parabole, est *convexe*).

Remarque 2 :

Deux droites affines $D_1 \mid y = a_1x + b_1$ et $D_2 \mid y = a_2x + b_2$ sont perpendiculaires si et seulement si le produit des coefficients directeurs est égal à -1 : $a_1 \times a_2 = -1$.

Remarque 3 :

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$, lorsqu'elle admet des racines x_1 et x_2 $(\Delta \geq 0)$, vérifie $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$.

Conséquence :

L'équation $a^2 - 2a - \frac{1}{4} = 0$ admet deux racines a' et a'' telles que $a' \times a'' = P = \frac{c}{a} = -\frac{1}{4}$.

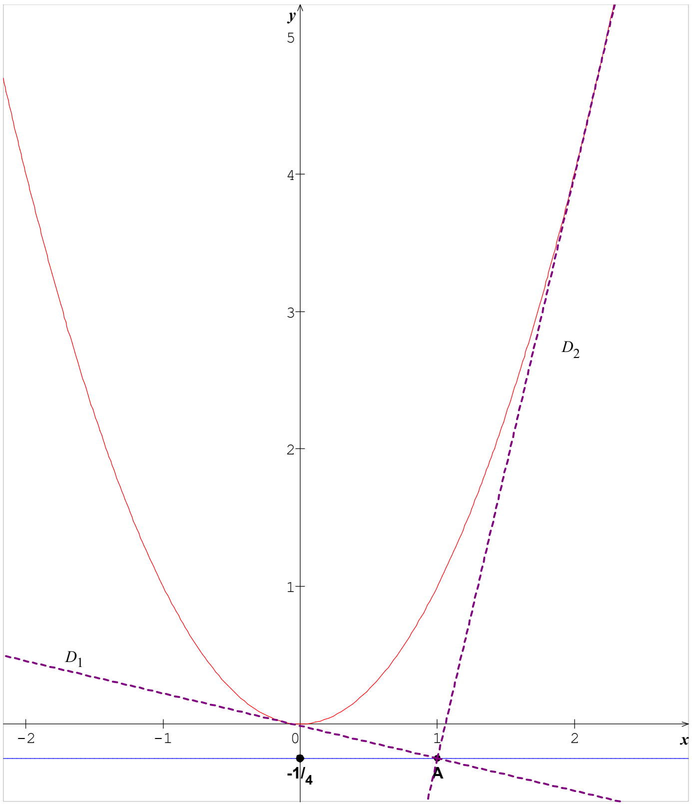
$a_1 \times a_2 = f'(a') \times f'(a'') = (2a') \times (2a'') = 4a'a'' = -1$ prouve que les tangentes à C passant par $A(1 ; -\frac{1}{4})$ sont perpendiculaires entre elles.

Droite Orthoptique :

On peut aisément démontrer, selon le même principe, que les points $A(\alpha ; \beta)$ d'où l'on voit la parabole C sous un angle droit, sont situés sur la droite D, d'ordonnée $y = -\frac{1}{4}$.

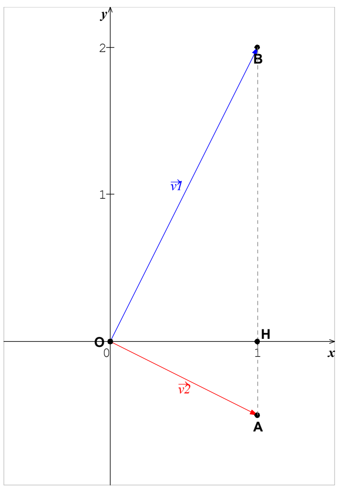
Les deux tangentes T_a qui passent par $A(\alpha ; \beta)$ vérifient : $\beta = 2a\times\alpha - a^2 \Leftrightarrow a^2 - 2\alpha a + \beta = 0$.

Elles sont perpendiculaires si et seulement si $a_1 \times a_2 = \frac{c}{a} = 4a'a'' = -1 \Leftrightarrow$, soit $a'a'' = \beta = -\frac{1}{4}$.



Preuve de la Remarque 2 :

Deux droites affines $D_1 \mid y = a_1x + b_1$ et $D_2 \mid y = a_2x + b_2$ sont perpendiculaires si et seulement si le produit des coefficients directeurs est égal à -1 : $a_1 \times a_2 = -1$.



Soient $\overrightarrow{v_1}(1 ; a_1)$ et $\overrightarrow{v_2}(1 ; a_2)$ les vecteurs directeurs des droites D_1 et D_2 .

Ceci impose a_1 et a_2 de signes opposés, pour que D_1 et D_2 puissent être perpendiculaires en O .

D'après Pythagore :

$$OA^2 = OH^2 + HA^2 = 1^2 + a_2^2 = 1 + a_2^2 .$$

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 = 1^2 + a_1^2 = 1 + a_1^2 .$$

$$AB^2 = (AH + HB)^2 = (|a_2| + a_1)^2 = (-a_2 + a_1)^2 = (a_1 - a_2)^2 = a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 .$$

Imposons $AB^2 = OA^2 + OB^2$: $a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 = 1 + a_2^2 + 1 + a_1^2 \Leftrightarrow -2a_1a_2 = 2 \Leftrightarrow a_1 \times a_2 = -1$.