Deux amis A et B se donnent rendez vous entre 12 et 13 h, sans préciser d'horaire d'arrivée particulier.

L'objectif est de déterminer la probabilité P pour que l'un ou l'autre attende plus de 10 mn l'arrivée de son ami.

On sait que A est arrivé à 12h20 .

L'heure d'arrivée de B est notée 12h + $X \times$ (10 mn) , ce qui signifie que $X = 4$ si B arrive à 12h40.

<u>A – Loi uniforme</u> :

On suppose que l'heure d'arrivée de B est équiprobable sur la tranche horaire 12h – 13h .

Calculer la probabilité P .

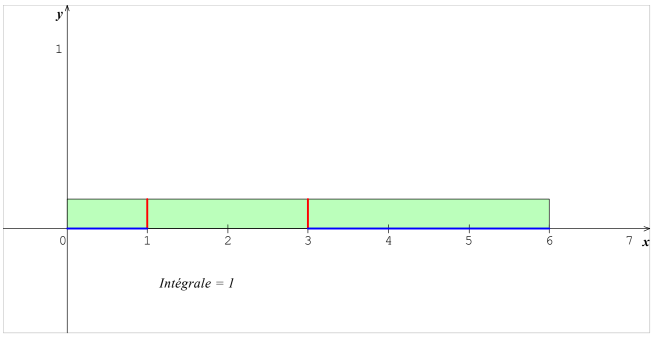
X suit une *loi uniforme* , soit de densité de probabilité $f(t)$ constante sur l'intervalle $[0 ; 6]$, qui correspond à une heure d'arrivée Y de B telle que 12h $\leq Y \leq$ 13h .

D'où : $f(t) = \dfrac{1}{b-a} = \dfrac{1}{6}$, pour $0 \leq t \leq 6$.

Sachant que A est arrivé à 12h20 , l'attente de l'un où l'autre sera supérieure à 10 mn si et seulement si B arrive avant 12h10 , soit s'il arrive après 12h30 , donc pour $0 \leq t \leq 1$ ou $3 \leq t \leq 6$.

On sait que $\int_0^6 f(t)\, dt = 1$, aire du rectangle de largeur 6 , de hauteur $\dfrac{1}{6}$.

L'aire sous f correspondant aux heures d'arrivée de B sources 'un retard supérieur à 10 mn , est celle sur l'intervalle $[0 ; 1] \cup [3 ; 6]$, qui représente les $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ de l'aire totale. D'où : $P = \dfrac{2}{3} \approx 0{,}66$ (66%).



B – Loi normale :

On suppose que la variable aléatoire X peut être approchée par une loi normale $N(\mu ; \sigma^2)$ telle que $\mu = 3$ et $\sigma = 1$.

1/ On pose $T = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$. Rappeler la loi suivie par T .

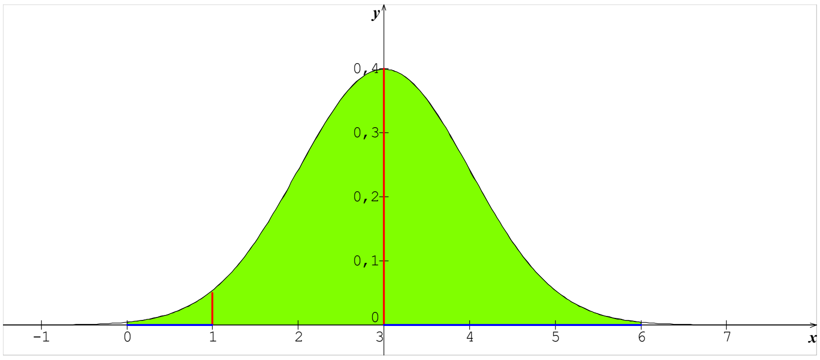
$T = X - 3$ suit la loi normale centrée réduite $T = N(0 ; 1)$.

La moyenne est centrée à 12h30 , et l'écart type est fixé à 10 mn.

2/ Justifier le fait que l'approximation de T puisse être faite par une loi normale.

On sait que selon la loi normale, la probabilité pour que la variable T s'écarte de sa moyenne μ de moins de 3σ est supérieure à 99% , soit : $P(\mu - 3\sigma \leq T \leq \mu - 3\sigma) \geq 0{,}99$.

Donc : $P(-3 \leq T \leq 3) \geq 0{,}99$, ce qui signifie que l'heure d'arrivée de B ne peut s'écarter de 30 mn par rapport à 12h30, que dans 1% des cas. Le modèle choisi assure donc que B arrive entre 12h et 13h à 99% de chances.



3/ Calculer la probabilité P .

L'attente sera supérieure à 10 mn, si $-3 \leq T \leq -2$ ou $0 \leq T \leq 3$, soit 12h $\leq Y \leq$ 12h10 ou 12h30 $\leq Y \leq$ 13h .

Calculé à la machine : $P(-3 \leq T \leq -2) + P(0 \leq T \leq 3) = 0{,}021 + 0{,}499 = 0{,}52$ (52%).

Comparé au cas précédent, la densité de probabilité étant concentrée autour de $T = 3$ *, l'arrivée de* B *aux alentours de* 12h30 *est prévisible, ce qui réduit la probabilité d'une attente supérieure à* 10 mn .

<u>C – Loi Exponentielle</u> :

On suppose que la variable aléatoire X peut être approchée par une loi exponentielle de paramètre λ .

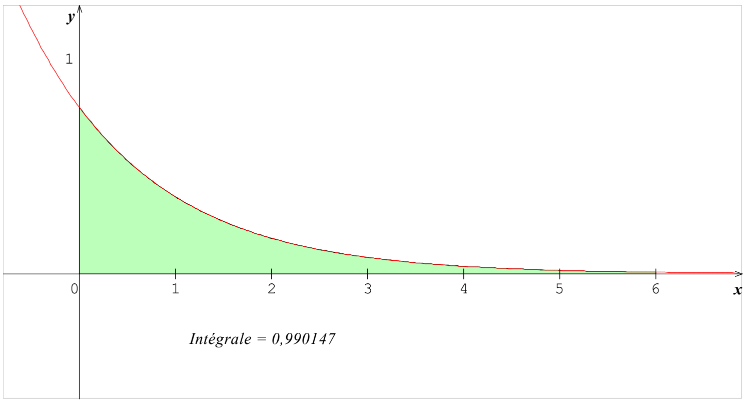
1/ Calculer λ à 10^{-2} près, pour que $P(0 \leq X \leq 6)$ soit supérieure à 99% .

On sait que $P(X \geq t) = e^{-\lambda t}$, soit $P(0 \leq X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

$P(0 \leq X \leq 6) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - e^{-6\lambda} \geq 0{,}01 \Leftrightarrow e^{-6\lambda} \leq 0{,}01 \Leftrightarrow -6\lambda \leq \ln(0{,}01) \Leftrightarrow \lambda \geq -\dfrac{1}{6}\ln(0{,}01)$.

D'où : $\lambda \geq 0{,}768$, ce que confirme le graphique ci-dessous.

L'intervalle $[0 ; 6]$ correspond à 99% des cas.



2/ On prendra $\lambda = 0{,}77$. Calculer la probabilité P .

$P(0 \leq T \leq 1) + P(3 \leq T \leq 6) = P(T \leq 1) + P(T \leq 6) - P(T \leq 3) = (1 - e^{-\lambda}) + (1 - e^{-6\lambda}) - (1 - e^{-3\lambda}) = 1 - e^{-0{,}77} - e^{-4{,}62} + e^{-2{,}31}$.

D'où : $P = 0{,}626$ (62,6%) .

Remarque : *L'heure d'arrivée de* B *est très probablement aux alentours de* 12h *, et très peu probable au-delà de* 12h30, *donc la probabilité d'une attente supérieure à* 10 mn *se résumé quasiment à l'arrivée de* B *entre* 12h *et* 12h10.