Les parties A, B et C sont indépendantes

Partie A

Restitution organisée des connaissances

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

> **Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel α appartenant à l'intervalle $]0 ; 1[$, il existe un unique réel strictement positif u_α tel que $P(-u_\alpha \le X \le u_\alpha) = 1 - \alpha$.**

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Soit H la fonction définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ par $H(x) = P(-x \le X \le x) = \int_{-x}^{x} f(t)\, dt$.

1/ Que représente la fonction f pour la loi normale centrée réduite ?

f est la *densité de probabilité* de la loi $N(\mu ; \sigma^2) = N(0 ; 1)$.

On peut assimiler $f(t)\, dt$ *à* $P(t \le X \le t + dt)$.

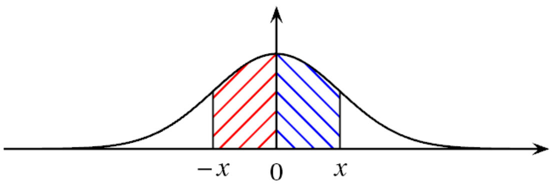
2/ Préciser $H(0)$ et la limite de $H(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

$H(0) = P(0 \le X \le 0) = \int_0^0 f(t)\, dt = 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} H(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} P(-x \le X \le x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$.

3/ A l'aide de considérations graphiques, montrer que pour tout nombre réel x positif , $H(x) = 2\int_0^x f(t)\, dt$.

La fonction f est paire ($f(-t) = f(t)$ pour tout $t \ge 0$) , donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe vertical $y'y$, donc $H(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\, dt = \int_{-x}^{0} f(t)\, dt + \int_0^x f(t)\, dt = 2\int_0^x f(t)\, dt$.



4/ En déduire que la dérivée H' de la fonction H sur $[0 ; +\infty[$ est la fonction $2f$, et dresser le tableau de variations de la fonction H sur $[0 ; +\infty[$.

f est définie et <u>continue</u> sur $\mathbb{R}$, donc admet des primitives.

Soit G une primitive quelconque de f : $H(x) = 2\int_0^x f(t)\, dt = 2[G(t)]_0^x = 2G(x) - 2.G(0) \Rightarrow H'(x) = 2G'(x) = 2f(x)$.

On conclue : $H' = 2f$.

Comme $f(x) > 0$ sur $[0 ; +\infty[$, on déduit H strictement croissante, telle que $H(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} H(x) = 1$.

x	0		$+\infty$
$H'(x)$		$+$	
$H(x)$	0	$\nearrow$	1

5/ Démontrer alors le théorème énoncé.

Le tableau de variations précédent montre que H établit une *bijection* de $[0 ; +\infty[$ sur $[0 ; 1[$,

donc tout nombre a réel, tel que $0 \le a \le 1$, admet un et un seul antécédent $x \ge 0$.

Comme $0 \le \alpha \le 1 \Rightarrow 0 \le 1 - \alpha \le 1$, il existe un réel $u_\alpha \ge 0$ unique, tel que $H(\alpha) = P(-u_\alpha \le X \le u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Partie B

Un laboratoire se fournit en pipettes auprès de deux entreprises, notées A et B .

60% des pipettes viennent de l'entreprise A et 4,6% des pipettes de cette entreprise possèdent un défaut.

Dans le stock total du laboratoire, 5% des pièces présentent un défaut.

On choisit au hasard une pipette dans le stock du laboratoire et on note :

***A* l'évènement : « La pipette est fournie par l'entreprise A » ;**

***B* l'évènement : « La pipette est fournie par l'entreprise B » ;**

***D* l'évènement : « La pipette a un défaut ».**

1/ La pipette choisie au hasard présente un défaut ; quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'entreprise A ?

$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0{,}6 \times 0{,}046 = 0{,}0276$.

2/ Montrer que $p(B \cap D) = 0{,}0224$.

$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D)$ (évènements incompatibles),

d'où : $P(B \cap D) = P(D) - P(A \cap D) = 0{,}0500 - 0{,}0276 = 0{,}0224$.

3/ Parmi les pipettes venant de l'entreprise B, quel pourcentage de pipettes présente un défaut ?

$P_B(D) = \dfrac{P(B \cap D)}{P(B)} = \dfrac{P(B \cap D)}{1 - P(A)} = \dfrac{0{,}0224}{0{,}4} = 0{,}056$, soit 5,6 % .

Partie C

Une pipette est dite conforme si sa contenance est comprise, au sens large entre 98 millilitres (mL) et 102 mL .

Soit X la variable aléatoire qui à chaque pipette prise au hasard dans le stock d'un laboratoire associe sa contenance (en mL). On admet que X suit une loi normale de moyenne μ et écart type σ tels que $\mu = 100$ et $\sigma^2 = 1{,}0424$.

1/ Quelle est alors la probabilité, à 10^{-4} près, pour qu'une pipette prise au hasard soit conforme ?

(On pourra s'aider de la table ci-dessous ou utiliser une calculatrice).

$P(98 \le X \le 102) = P(X \le 102) - P(X \le 98) = 0{,}97494 - 0{,}02506 = 0{,}94988$, soit $0{,}9499$ à 10^{-4} près.

Contenance x (en mL)	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**
$P(X \le x)$ arrondi à 10^{-5}	0,00000	0,00004	0,00165	0,02506	0,16368
Contenance x (en mL)	**100**	**101**	**102**	**103**	**104**
$P(X \le x)$ arrondi à 10^{-5}	0,5	0,83632	0,97494	0,99835	0,99996

Pour la suite, on admet que la probabilité pour qu'une pipette soit non-conforme est $p = 0{,}05$.

2/ On prélève dans le stock du laboratoire des échantillons de pipettes de taille n , où n est un entier naturel supérieur ou égal à 100 .

On suppose que le stock est assez important pour considérer ces tirages comme indépendants.

Soit Y_n la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille n associe le nombre de pipettes non-conformes de l'échantillon.

a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y_n ?

Chaque pipette choisie l'est indépendamment des autres (sans remise, mais cela n'influence pas le stock, ni la probabilité de choisir telle ou telle pipette, au vu de la dimension du stock = évènements indépendants équiprobables)

Y_n suit la loi binomiale $B(n\ ;\ p) = B(n\ ;\ 0{,}05)$.

b) Vérifier que $n > 30$, $np > 5$ et $n(1-p) > 5$. Quelle en est la conséquence ?

$n \geq 100$, $np \geq 100\times 0{,}05$, soit $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 100\times 0{,}95$, soit $n(1-p) \geq 5$.

En conséquence, on peut considérer pouvoir utiliser *l'intervalle de fluctuation asymptotique*, qui revient à identifier une loi binomiale Y_n à une loi normale $Z = \frac{Y_n}{n}$, ce qui n'est rigoureux que pour n tendant vers $+\infty$, mais validé dès les conditions précédentes satisfaites.

c) Donner en fonction de n l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence des pipettes non-conformes dans un échantillon.

On sait que $I_n = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ,\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$ au seuil de 95% (95% des lots dans cette fourchette).

$I_n = \left[0{,}05 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}05\times 0{,}95}}{\sqrt{n}}\ ,\ 0{,}05 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}05\times 0{,}95}}{\sqrt{n}} \right]$

d) Sur un lot de 1.600 pipettes, on dénombre 12 pipettes non conformes. Qu'en conclure ?

$I_{1600} = \left[0{,}05 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}05\times 0{,}95}}{\sqrt{1600}}\ ,\ 0{,}05 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}05\times 0{,}95}}{\sqrt{1600}} \right] = [0{,}00393\ ;\ 0{,}00607]$.

La fréquence $F = \frac{12}{1600} = 0{,}0075$ est supérieure au maximum attendu pour 95% des lots, et on peut suspecter que ce lot ne soit pas conforme.