Pour chacun des nombres complexes suivants, donner sa forme algébrique, trigonométrique et exponentielle.

a) $\boldsymbol{z_1 = 1 - e^{i\pi/2}}$ **:**

On peut savoir que $e^{i\pi/2} = i$ $\left(e^{i\pi/2} = 1.\, e^{i\pi/2} = 1.(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 1.(0 + i.1) = i\right)$.

$z_1 = 1 - i$ (forme algébrique).

L'écriture $z_1 = 1 - e^{i\pi/2}$ n'est pas satisfaisante pour la forme exponentielle, qui doit être $z_1 = r.e^{i\theta}$, avec $r \geq 0$.

Retrouvons l'écriture trigonométrique : $z = a + ib \Rightarrow r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\begin{cases} \text{co } \theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$, dont on déduit $\theta\ [2\pi]$.

$$z_1 = 1 - i \Rightarrow r = |z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \text{ et } \begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = +\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \text{ soit } \theta = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

On conclue : $z_1 = r(\cos\theta + i.\sin\theta) = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$ (forme trigonomérique).

$z_1 = r.e^{i\theta} = \sqrt{2}.e^{-i\pi/4}$ (forme exponentielle).

Méthode rapide :

$z_1 = 1 - i \Rightarrow a = 1$ et $b = -1$, or en valeur absolue, l'angle dont le cosinus et le sinus sont identique est $\frac{\pi}{4}$.

Faisons apparaître $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$z_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i\right] = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}.e^{-i\pi/4},$$

b) $\boldsymbol{z_2 = -2e^{i\pi/6}}$ **:**

On peut déjà remarquer que, sous forme exponentielle, $r = -2$ est impossible.

Dans la méthode rapide, il faudra introduire un facteur -1 dans l'exponentielle.

$z_2 = -2e^{i\pi/6} = -2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6}\right) = -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i$ (forme algébrique).

$$z_2 = -\sqrt{3} - i \Rightarrow r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2 \text{ et } \begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

On sait que $\begin{cases} \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{cases}$, d'où $\begin{cases} \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

On conclue : $z_2 = -\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 2e^{7i\pi/6}$ (formes trigonométrique et exponentielle).

Méthode rapide :

On doit savoir $e^{i\pi/2} = i$ et $e^{i\pi} = -1$.

$$z_2 = -2e^{i\pi/6} = 2.e^{i\pi}.e^{i\pi/6} = 2.e^{i(\pi + \pi/6)} = 2.e^{7i\pi/6} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i.$$

c) $\boldsymbol{z_3 = 6(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3})}$

On remarque l'inversion entre le sinus et le cosinus par rapport à $r(\cos\theta + i.\sin\theta)$.

Dans la méthode rapide, il faudra modifier cet ordre par l'introduction d'un angle comportant $\frac{\pi}{2}$.

$z_3 = 6(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}) = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 3\sqrt{3} + 3i$.

$z_3 = 3\sqrt{3} + 3i \;\Rightarrow\; r = |z_3| = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{27 + 9} = \sqrt{36} = 6$, et $\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{cases}$, soit $\theta = \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$.

On conclue : $z_3 = 6\left(\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}}\right) = 6.e^{i\pi/6}$ (formes trigonométrique et exponentielle).

Méthode rapide :

On doit savoir $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a \end{cases}$, *inversion des ligne trigonométriques.*

$z_3 = 6(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}) = 6\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right] = 6\left(\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}}\right) = 6.e^{i\pi/6} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 3\sqrt{3} + 3i$.