La fonction f est définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x^2}$.

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1/ Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

f est *définie*, *continue* et *dérivable* sur $]0\,;+\infty[$.

- Si $x\to 0^+$: $f(x)=\dfrac{1}{x^2}(1+2\ln x)$ et $\left\{\begin{array}{l}1+2\ln x\to -\infty\\ \dfrac{1}{x^2}\to+\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

- Si $x\to+\infty$: $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+2\dfrac{\ln x}{x^2}$ et $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{x^2}\to 0\\ \dfrac{\ln x}{x^2}\to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

La courbe représentative de f admet une asymptote horizontale $y=0$ vers $+\infty$.

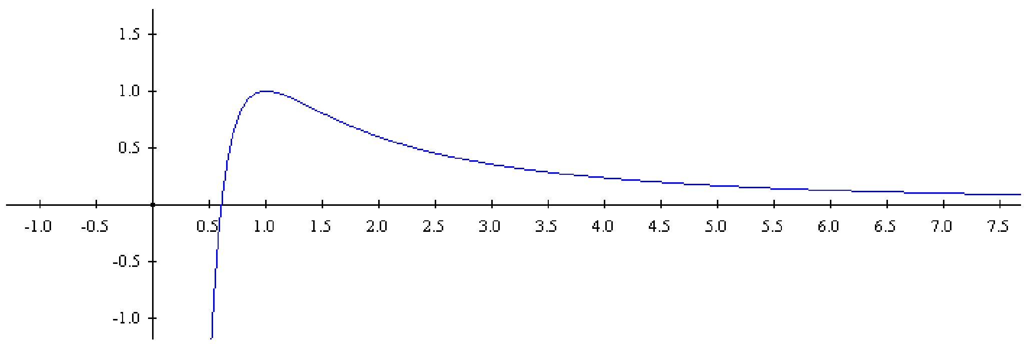
Dérivée : $f=\dfrac{u}{v}\ \Rightarrow\ f'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$, soit $f'(x)=\dfrac{\dfrac{2}{x}\times x^2-2x(1+2\ln x)}{x^4}=-4\dfrac{\ln x}{x^3}$.

$f'(x)=0\ \Leftrightarrow\ \ln x=0\ \Leftrightarrow\ x=1$ avec $f(1)=\dfrac{1+2\ln 1}{1^2}=1$.

$f'(x)$ est du signe de $-\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$ d'où : $\left\{\begin{array}{l}0<x<1\ \Leftrightarrow\ \ln x<0\ \Leftrightarrow\ f'(x)>0\\ x>1\ \Leftrightarrow\ \ln x>0\ \Leftrightarrow\ f'(x)<0\end{array}\right.$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0

2/ Tracer sa courbe représentative.



3/ Soit (D) la partie du plan définie par les inégalités suivantes $\left\{\begin{array}{l}1\le x\le 2\\ 0\le y\le f(x)\end{array}\right.$.

a) Montrer que $F(x)=-\dfrac{1}{x}(3+2\ln x)$ est une primitive de f.

Vérifions que $F'(x)=f(x)$ pour tout $x>0$.

$F=u.v\ \Rightarrow\ F'=u'.v+v'.u$ avec $\left\{\begin{array}{l}u(x)=-\dfrac{1}{x}\ \Rightarrow\ u'(x)=\dfrac{1}{x^2}\\ v(x)=3+2\ln x\ \Rightarrow\ v'(x)=\dfrac{2}{x}\end{array}\right.$.

$F'(x) = \frac{1}{x^2}(3 + 2\ln x) - \frac{1}{x} \times \frac{2}{x} = \frac{3}{x^2} + 2\frac{\ln x}{x^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{1 + 2\ln x}{x^2} = f(x)$ pour tout $x > 0$.

Déterminer l'aire de (*D*) , notée *A* , en unités d'aire.

Le domaine (D) est celui compris entre la courbe (C) , l'axe des abscisses et les verticales $x = 1$ et $x = 2$.

La fonction étant positive sur ce domaine, on déduit : $A = \int_1^2 f(x)\,dx$ unités d'aires (inconnue ici).

$A = \int_1^2 \frac{1 + 2\ln x}{x^2}\,dx = [F(x)]_1^2 = (F(2) - F(1)) \times$ u.a.

$A = -\frac{1}{2}(3 + 2\ln 2) + 3 = \left(\frac{3}{2} - \ln 2\right)$ u.a.