Soit la fonction f d'équation $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

Déterminer les équations des tangente à sa courbe représentative C_f qui passent par le point $A(0 ; \dfrac{13}{25})$.

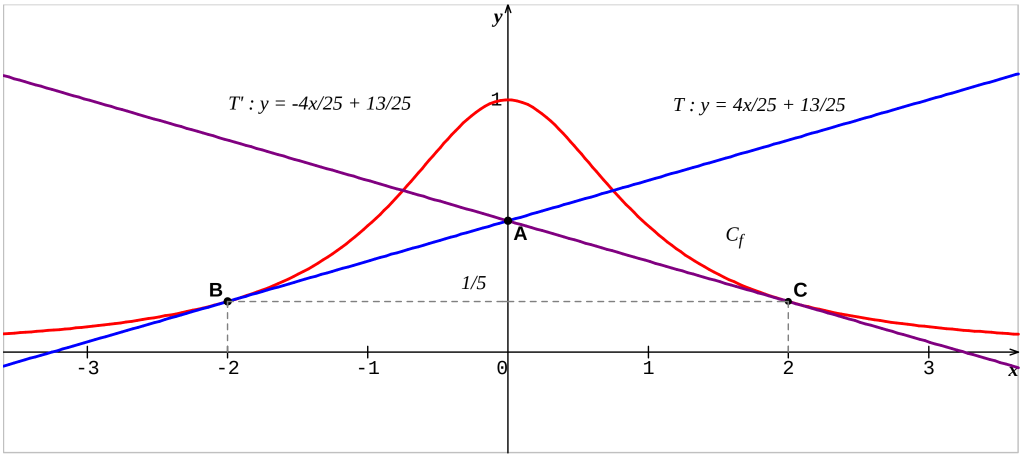
Cette fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, puisque $x^2 + 1 \neq 0$ pour tout x réel.

Elle est également dérivable sur $\mathbb{R}$, comme inverse d'un polynôme jamais nul.

- *On écrit l'équation de la tangente T_a en un point M quelconque de la courbe C_f : $T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$.*

On sait que $f = \dfrac{1}{u} \Rightarrow f' = -\dfrac{u'}{u^2}$, d'où : $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{2x}{(1 + x^2)^2}$.

$T_a :\ y = -\dfrac{2a}{(1 + a^2)^2}(x - a) + \dfrac{1}{a^2 + 1} \Leftrightarrow T_a : y = -\dfrac{2a}{(1 + a^2)^2}x + \dfrac{2a^2}{(1 + a^2)^2} + \dfrac{1}{a^2 + 1}$, soit $T_a : y = -\dfrac{2a}{(1 + a^2)^2}x + \dfrac{3a^2 + 1}{(1 + a^2)^2}$.



- *On fait varier l'abscisse du point de tangence M pour que la tangente passe par A .*

Imposons que T_a passe par $A(0 ; \dfrac{13}{25})$:

$A(0 ; \dfrac{13}{25}) \in T_a \Leftrightarrow \dfrac{13}{25} = -\dfrac{2a}{(1 + a^2)^2}\times 0 + \dfrac{3a^2 + 1}{(1 + a^2)^2} \Leftrightarrow 13(1 + a^2)^2 = 25(3a^2 + 1) \Leftrightarrow 13a^4 + 26a^2 + 13 = 75a^2 + 25$.

$13a^4 - 49a^2 - 12 = 0$.

On pose $X = a^2$, soit $13X^2 - 49X - 12 = 0$, de racines $X_1 = +4$ et $X_2 = -\dfrac{3}{13}$.

Comme $a^2 = -\dfrac{3}{13}$ est impossible, on retient $a^2 = +4$, soit $a_1 = -2$ et $a_2 = +2$, abscisses des points M de tangence des deux tangentes à C_f passant par A .

En reportant a dans $T_a : y = -\dfrac{2a}{(1 + a^2)^2}x + \dfrac{3a^2 + 1}{(1 + a^2)^2}$, on obtient les équations des tangentes cherchées :

- $a_1 = -2$, soit $T_{-2} : y = \dfrac{4}{25}x + \dfrac{13}{25}$, tangente en $B(-2 ; +\dfrac{1}{5})$,
- $a_2 = +2$, soit $T_2 : y = -\dfrac{4}{25}x + \dfrac{13}{25}$, tangente en $C(+2 ; +\dfrac{1}{5})$.