Soit la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x) = 3\sqrt{x} + 2$.

1/ Soit h un nombre réel non nul. Montrer que le taux d'accroissement de f en 9 est $\dfrac{9}{3\sqrt{9+h}+9}$.

$$T_{9\,;\,9+h} = \frac{f(9+h)-f(9)}{h} = \frac{[3\sqrt{9+h}+2]-(3\sqrt{9}+2)}{h} = \frac{[3\sqrt{9+h}+2]-(3\times3+2)}{h} = \frac{3\sqrt{9+h}+2-11}{h} = \frac{3\sqrt{9+h}\ -9}{h},$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la <u>quantité conjuguée</u> du numérateur :

$$T_{9\,;\,9+h} = \frac{[3\sqrt{9+h}-9][3\sqrt{9+h}+9]}{h[3\sqrt{9+h}+9]} = \frac{(3\sqrt{9+h}\,)^2-9^2}{h[3\sqrt{9+h}+9]} = \frac{9(9+h)-9^2}{h[3\sqrt{9+h}+9]} = \frac{9h}{h[3\sqrt{9+h}+9]} = \frac{9}{3\sqrt{9+h}+9}$$, après simplification par $h \neq 0$.

2/ En déduire la valeur de $f'(9)$.

$$f'(9) = \lim_{h\to 0} T_{9\,;\,9+h} = \lim_{h\to 0} \frac{9}{3\sqrt{9+h}+9} = \frac{9}{3\sqrt{9}+9} = \frac{9}{9+9} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}.$$

3/ Retrouver ce résultat en calculant la fonction dérivée de f .

$f(x) = 3\sqrt{x} + 2 \Rightarrow f'(x) = 3\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 0$, soit $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$.

On déduit : $f'(9) = \dfrac{3}{2\sqrt{9}} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.