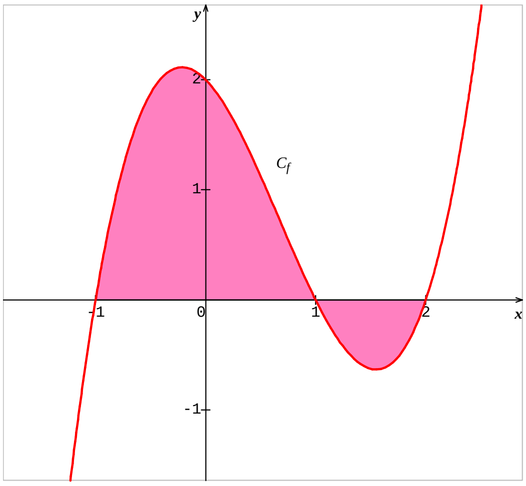
Dans un repère orthonormé d'unités 2 cm, on a tracé la courbe représentative de la fonction f suivante :

$f : x \longrightarrow f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Déterminer l'aire de la surface colorée.



La surface *algébrique* $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, qui mesure le nombre de pavés élémentaires de -1 vers +1 est positive, alors que la surface algébrique $\int_{1}^{2} f(x)\,dx$, qui mesure le nombre de pavés élémentaires de +1 vers +2 est négative, donc doit être changée de signe.

L'aire cherchée est $A = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int_{1}^{2} f(x)\,dx$ unités d'aire.

$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ admet $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x$ pour primitive.

$A = [F(x)]_{-1}^{+1} - [F(x)]_{+1}^{+2} = [F(+1) - F(-1)] - [F(+2) - F(+1)] = 2F(+1) - F(-1) - F(+2)$,

$A = 2\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 2\right) - \left(\frac{16}{4} - \frac{16}{3} - \frac{4}{2} + 4\right) = \frac{37}{12}$ unités d'aire.

Le pavé élémentaire (unité d'aire) est de surface $u \times u' = 2 \times 2 = 4\ \text{cm}^2$, d'où : $A = \frac{37}{12} \times 4 = \frac{37}{3} \approx 12{,}33\ \text{cm}^2$.