Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes :

a) $\boldsymbol{f(x) = (x^2 + x + 1)^2}$ **:**

F est une des primitives de f si et seulement si $F'(x) = f(x)$, pour tout $x \in D_f$.

Une fonction f admet une infinité de primitives, égales entre elles, à une constante réelle k près.

$$\begin{cases} F \in Prim\,(f) \\ G \in Prim\,(f) \end{cases} \Rightarrow G(x) = F(x) + k \text{ , avec } k \text{ réel, pour tout } x \in D_f \text{ .}$$

On ne peut pas directement *intégrer* cette fonction (en calculer les primitives). Il faut développer l'expression.

On peut effectuer le produit $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1)$, mais aussi connaître l'identité remarquable :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \text{ .}$$

$f(x) = (x^2 + x + 1)^2 = x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x^2 + 2x = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

$$F_k(x) = \frac{1}{5}x^5 + 2\left(\frac{1}{4}x^4\right) + 3\left(\frac{1}{3}x^3\right) + x^2 + x + k = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + x^3 + x^2 + x + k \text{ .}$$

b) $\boldsymbol{g(x) = (x^2 + x + 1)^3(2x + 1)}$ **:**

On pourrait croire ce cas plus complexe que le précédent, alors que c'est l'inverse.

On est en présence d'une primitive de fonction composée :

Pour $n \in \mathbb{N}$: $(x^{n+1})' = (n + 1).x^n \Rightarrow Prim\,(x^n) = \dfrac{x^{n+1}}{n + 1} + k$,

d'où : $(u^{n+1})' = (n + 1).u^n.\boldsymbol{u'} \Rightarrow Prim\,(u^n.\boldsymbol{u'}) = \dfrac{u^{n+1}}{n + 1} + k$.

On constate la présence indispensable de $\boldsymbol{u'}$ dès que intègre une fonction $u(x)$.

Or : $u(x) = x^2 + x + 1 \Rightarrow u'(x) = 2x + 1$.

$g(x) = (x^2 + x + 1)^3\boldsymbol{(2x + 1)}$ est une forme $u^3.\boldsymbol{u'}$, de primitives $\dfrac{u^4}{4} + k$.

$$G_k(x) = \frac{1}{4}(x^2 + x + 1)^4 + k \text{ .}$$

c) $\boldsymbol{h(x) = \dfrac{x - 2}{(x^2 - 4x + 1)^2}}$ **:** On est en présence d'une primitive de fonction composée :

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow Prim\,\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x} + k \text{ , d'où : } \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{\boldsymbol{u'}}{u^2} \Rightarrow Prim\,\left(\frac{\boldsymbol{u'}}{u^2}\right) = -\frac{1}{u} + k$$

Or : $u(x) = x^2 - 4x + 1 \Rightarrow u'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$.

$h(x) = \dfrac{x - 2}{(x^2 - 4x + 1)^2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\boldsymbol{2x - 4}}{(x^2 - 4x + 1)^2}$, avec $\dfrac{\boldsymbol{2x - 4}}{(x^2 - 4x + 1)^2}$ qui est une forme $\dfrac{\boldsymbol{u'}}{u^2}$, de primitives $-\dfrac{1}{u} + k$.

$$H_k(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2 - 4x + 1}\right) + k = -\frac{1}{2(x^2 - 4x + 1)} + k \text{ .}$$

d) $\boldsymbol{k(x) = \dfrac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}}$ **:** On est en présence d'une primitive de fonction composée :

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow Prim\,\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 2\sqrt{x} + k \text{ , d'où : } (\sqrt{u})' = \frac{\boldsymbol{u'}}{2\sqrt{u}} \Rightarrow Prim\,\left(\frac{\boldsymbol{u'}}{\sqrt{u}}\right) = 2\sqrt{u} + k \text{ .}$$

Or : $u(x) = x^2 + x + 1 \Rightarrow u'(x) = 2x + 1$, soit $k(x) = \dfrac{\boldsymbol{2x + 1}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ est de forme $\dfrac{\boldsymbol{u'}}{\sqrt{u}}$, de primitives $2\sqrt{u} + k$.

$$K_k(x) = 2\sqrt{x^2 + x + 1} + k \text{ .}$$