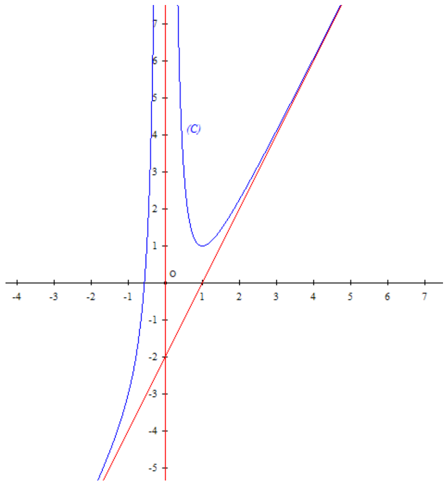
La fonction f est définie pour $x \neq 0$ par : $f(x) = 2x - 2 + \dfrac{1}{x^2}$.

On donne ci-dessous sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormal.



Pour tout nombre réel $\lambda > 0$, on note $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe (C), son asymptote oblique et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.

a) Calculer $A(\lambda)$ en distinguant deux cas.

Comme $f(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$:

$\lambda \leq 1 \Rightarrow A(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)\,dx = -\int_1^\lambda f(x)\,dx$.

$\lambda \geq 1 \Rightarrow A(\lambda) = \int_1^\lambda f(x)\,dx$.

Par ailleurs : $\int_1^\lambda f(x)\,dx = \int_1^\lambda (2x - 2 + \frac{1}{x^2})\,dx = \left[x^2 - 2x - \frac{1}{x}\right]_1^\lambda = F(\lambda) - F(1) = \lambda^2 - 2\lambda - \frac{1}{\lambda} + 2$.

On déduit : $\begin{cases} 0 < \lambda \leq 1 \Rightarrow A(\lambda) = -(\lambda^2 - 2\lambda - \frac{1}{\lambda} + 2) \\ \lambda \geq 1 \Rightarrow A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - \frac{1}{\lambda} + 2 \end{cases}$ unités d'aire.

b) Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Si $\lambda \to +\infty$, $\left\{\begin{array}{c} \lambda^2 - 2\lambda + 2 \to +\infty \\ \frac{1}{\lambda} \to 0^+ \end{array}\right\}$ d'où : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = +\infty$.

c) Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers 0.

Si $\lambda \to 0^+$, $\left\{\begin{array}{c} \lambda^2 - 2\lambda + 2 \to 2 \\ \frac{1}{\lambda} \to +\infty \end{array}\right\}$ d'où : $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} A(\lambda) = +\infty$.