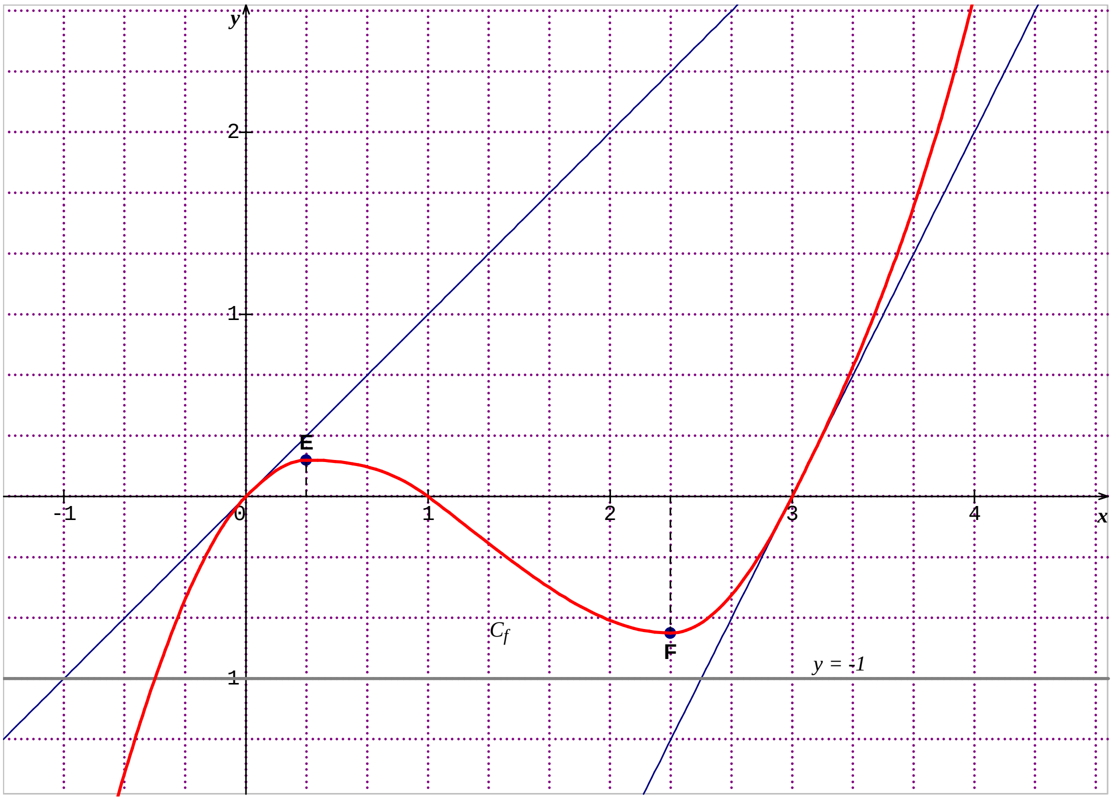
On a tracé la courbe représentative C_f d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que deux de ses tangentes.



Par lecture graphique :

1/ Déterminer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h)}{h}$.

On sait $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$.

Comme $f(3) = 0$, on déduit $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = f'(3)$, coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse $x = 3$

Cette tangente *monte* de 4 carreaux, lorsque l'on avance de 2 carreaux, soit : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h)}{h} = f'(3) = \dfrac{4}{2} = +2$.

2/ Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

De même $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)}{h}$.

Comme $f(0) = 0$: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = f'(0) = +1$, car le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse $x = 0$ est $+1$.

On pouvait aussi utiliser $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ en $a = 0$.

3/ Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -1$, pour $x \in [-1 ; 3]$.

On cherche les abscisses des intersections entre C_f et la droite horizontale d'ordonnée $y = -1$.

Par lecture graphique, on constate que sur [-1 ; +3] , il n'existe aucune intersection entre ces deux courbes : $S = \varnothing$.

4/ Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x$, pour $x \in [-1 ; 3]$.

On cherche les abscisses des intersections entre C_f et la droite affine oblique $y = x$, tangente à C_f en $x = 0$.

Sur [-1 ; +3] la solution est unique, $x = 0$, soit $S = \{0\}$.

5/ Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f'(x) = 0$, pour $x \in [-1 ; 3]$.

On cherche les abscisses des extremum (maximum et minimum) de C_f sur [-1 ; 3] .

Par lecture graphique, on constate un maximum local en E , d'abscisse $x_E = +\frac{1}{3}$, et un minimum local en F ,

d'abscisse $x_F = 2 + \frac{1}{3} = +\frac{7}{3}$, soit $S = \{+\frac{1}{3} ; +\frac{7}{3}\}$.