Soit $s_n = \sum_{p=1}^{n} p = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

Considérons la proposition P_n : $s_n = \dfrac{1}{2}\left(n + \dfrac{1}{2}\right)^2$.

1/ Démontrer que P_n vraie implique P_{n+1} vraie.

P_{n+1} dit : « $s_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left[(n+1) + \dfrac{1}{2}\right]^2$ ».

Or, $s_{n+1} = s_n + (n+1) = \dfrac{1}{2}\left(n + \dfrac{1}{2}\right)^2 + (n+1)$ en <u>supposant</u> P_n vraie.

$$s_{n+1} = \frac{1}{2}\left(n^2 + n + \frac{1}{4}\right) + (n+1) = \frac{1}{2}\left(n^2 + 3n + \frac{9}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(n + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[(n+1) + \frac{1}{2}\right]^2 .$$

On a vérifié l'hérédité, selon laquelle P_n vraie implique ¨P_{n+1} vraie.

2/ La proposition P_n est-elle vraie pour tout n entier naturel ?

Pour que la récurrence soit complète, faut-il encore qu'elle soit *initialisée*, donc que P_1 soit vraie.

Or, P_1 dit ; « $s_1 = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{8}$ », alors que $s_1 = 1$.

On ne peut pas généraliser la récurrence, dont l'hérédité est correcte, mais qui n'est pas initialisée.

Remarque :

On peut savoir que $s_n = \sum_{p=1}^{n} p = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{1}{2}\, n(n+1)$.