Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $3^{2n} + 2^{6n-5}$ est divisible par 11 .

- Par Congruences :

$3^2 = 9 \Rightarrow 3^2 \equiv -2[11]$, d'où : $3^{2n} = (3^2)^n \equiv (-2)^n[11]$.

$2^6 = 64 \Rightarrow 2^6 \equiv -2[11]$, d'où : $2^{6n-5} = 2^{6(n-1)+1} = 2\times 2^{6(n-1)} = 2\times(2^6)^{(n-1)} \equiv 2\times(-2)^{n-1} \equiv -(-2)\times(-2)^{n-1} \equiv -(-2)^n[11]$.

Par addition, on obtient : $3^{2n} + 2^{6n-5} \equiv 0[11]$, soit la divisibilité de $3^{2n} + 2^{6n-5}$ par 11 .

- Par Récurrence :

Soit, pour tout entier $n \geq 1$, la proposition de récurrence P_n : « $3^{2n} + 2^{6n-5}$ est divisible par 11 » .

a) *Initialisation* : P_1 est vraie, car P_1 dit : $3^2 + 2^1 = 9 + 2 = 11$ est divisible par 11 .

b) *Hérédité* : Supposons P_n vraie, soit : $3^{2n} + 2^{6n-5} = 11.K$, avec $K \in \mathbb{N}$.

Peut-on en déduire P_{n+1} vraie, soit : $3^{2(n+1)} + 2^{6(n+1)-5} = 11.K'$, avec $K' \in \mathbb{N}$?

$3^{2(n+1)} + 2^{6(n+1)-5} = 3^{2n+2} + 2^{(6n-5)+6} = 3^2\times 3^{2n} + 2^6\times 2^{(6n-5)} = 9\times 3^{2n} + 64\times 2^{(6n-5)}$,

$3^{2(n+1)} + 2^{6(n+1)-5} = 64\times(3^{2n} + 2^{6n-5}) - 55\times 3^{2n} = 64\times 11.K - 5\times 11\times 3^{2n} = 11\times(64K - 5\times 3+2^n) = 11\times K'$, $K' \in \mathbb{N}$.

L'hérédité est vérifiée.

c) *Conclusion* : P_n est vraie pour tout $n \geq 1$, donc $3^{2n} + 2^{6n-5}$ est divisible par 11 .