Dans un repère (O, I, J), on considère les points $A(-1 ; 4)$, $B(-1 ; -1)$, $C(5 ; 1)$ et $D(8 ; -8)$.

Le point E est le milieu du segment $[BC]$.

1/ Calculer les coordonnées du point E.

Les coordonnées du milieu d'un segment sont la demi somme des coordonnées des extrémités de ce segment $x_E = \dfrac{x_B + x_C}{2}$ et $y_E = \dfrac{y_B + y_C}{2}$

$$\begin{cases} x_E = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{(-1) + 5}{2} = +2 \\ y_E = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{(-1) + 1}{2} = 0 \end{cases}$$

. Le point $E(2 ; 0)$ appartient à l'axe des abscisses $x'x$.

2/ Montrer que le point D appartient à la médiane du triangle ABC, issue de A.

La médiane issue de A est la droite (AE), qui joint le sommet A au milieu E du côté opposé $[BC]$.

Il suffit de vérifier que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires, soit $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AD}$, avec k réel.

$$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - (-1) \\ (-8) - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} x_E - x_A \\ y_E - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - (-1) \\ 0 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

On constate que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AE}$, ce qui prouve l'alignement.

3/ Le quadrilatère $ABDC$ est-il un parallélogramme ?

Il faut vérifier si $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, ou si $[AD]$ et $[BC]$ ont un même milieu.

Soit F le milieu de $[AD]$, $\begin{cases} x_F = \dfrac{x_A + x_D}{2} = \dfrac{(-1) + 8}{2} = +\dfrac{7}{2} \\ y_F = \dfrac{y_A + y_D}{2} = \dfrac{4 + (-8)}{2} = -2 \end{cases}$, soit $F(\dfrac{7}{2} ; -2)$.

Les milieux E et F ne sont pas confondus, donc $ABDC$ n'est pas un parallélogramme.