Soit a un nombre réel. On considère dans un repère du plan les points $A(-1\ ;\ 2)$, $B(0\ ;\ 3)$, $C(a^2\ ;\ 3a + 1)$.

Déterminer a pour que les points A , B et C soient alignés.

Imposons $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires.

Possédant le point A en commun, la relation $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$, $k \in \mathbb{R}$, assurera l'alignement de ces trois points.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - (-1) \\ 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - (-1) \\ (3a + 1) - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 1 \\ 3a - 1 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires } \Leftrightarrow \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Leftrightarrow \frac{3a - 1}{a^2 + 1} = \frac{1}{1} = 1 \Leftrightarrow a^2 + 1 = 3a - 1 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0\ .$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(2) = 9 - 8 = 1 > 0 \ \text{, soit } \begin{cases} a_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3 - 1}{2} = 1 \Rightarrow C_1(1\ ;\ 4) \\ a_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3 + 1}{2} = 2 \Rightarrow C_2(4\ ;\ 7) \end{cases}.$$