Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2 + 3u_n}$.

1/ Vérifier que la suite u est à termes positifs.

Soit la proposition de récurrence P_n : « $u_n > 0$ ».

- *Initialisation* : P_0 est vraie, car $u_0 = 1 > 0$.

- *Hérédité* : Supposons P_n vraie ($u_n > 0$), peut-on en déduire P_{n+1} vraie ($u_{n+1} > 0$) ?

$u_n > 0 \Rightarrow \dfrac{2u_n}{2 + 3u_n} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$. On conclue que P_{n+1} est vraie, sous réserves que P_n le soit.

- *Conclusion* : P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n > 0$.

2/ Montrer que la suite u est décroissante. Que peut-on en déduire ?

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{2 + 3u_n} - u_n = \frac{2u_n}{2 + 3u_n} - \frac{u_n(2 + 3u_n)}{2 + 3u_n} = \frac{2u_n}{2 + 3u_n} - \frac{2u_n + 3u_n^2}{2 + 3u_n} = -\frac{3u_n^2}{2 + 3u_n} < 0.$$

On conclue $u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite u est décroissante.

La suite u étant *décroissante*, *minorée* par 0, est *convergente* vers $L \geq 0$.

3/ Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$. La relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2 + 3u_n}$, devient pour $n \to +\infty$: $L = \dfrac{2L}{2 + 3L}$,

$2L + 3L^2 = 2L \Leftrightarrow L^2 = 0$, soit $L = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.