<u>Remarque</u> : *L'utilisation de l'intervalle de fluctuation permet de vérifier sur un échantillon, qu'une proportion est conforme à un résultat annoncé ou supposé.*
Inversement, si l'on veut déterminer, à partir d'un échantillon, la proportion dans une population générale, on utilise un intervalle de confiance.

Un constructeur affirme que la probabilité qu'un de ses téléviseurs ait une panne dans les 5 ans suivant son achat est égale à 0,17 .

1/ Justifier, en utilisant une calculatrice, que l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence de panne pour un échantillon de 40 téléviseurs est [0,054 ; 0,286] au seuil de 95% , et [0,072 ; 0,268] au seuil de 90%.

On connaît une proportion annoncée $p = 0{,}17$ *, et on veut vérifier sur un échantillon de* $n = 40$ *téléviseurs si, en tenant compte de l'<u>intervalle de fluctuation au seuil désiré</u>, la proportion constatée dans l'échantillon est conforme à celle annoncée. On est dans une situation d'<u>échantillonnage</u>.*

$n = 40$ et $p = 0{,}17 \Rightarrow np = 6{,}8$ et $n(1-p) = 33{,}2$.

Les conditions de l'approximation de la loi binomiale $B(n\,;p)$ par la loi normale centrée réduite $N(0\,;1)$ sont réunies :

$n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

On pose $Z = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \dfrac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)}$.

Pour tout réel $\alpha \in \,]0\,;1[$: u_α désigne le réel tel que $p(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$ lorsque $Z = N(0\,;1)$.

L'intervalle $I_n = [\, p - u_\alpha.\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p - u_\alpha.\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,]$ est appelé *intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de* $1 - \alpha$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} p(\dfrac{X_n}{n} \in I_n) = 1 - \alpha$.

- Soit $\alpha = 0{,}05$: $p(-u_{0,05} \leq Z \leq u_{0,05}) = 0{,}95 \Leftrightarrow p(Z \leq u_{0,05}) - p(Z \leq u_{-0,05}) = 0{,}95$,
  $p(Z \leq u_{0,05}) - [1 - p(Z \leq u_{0,05})] = 0{,}95 \Leftrightarrow p(Z \leq u_{0,05}) = 0{,}975$.
  La calculatrice donne TI 83+ : $u_{0,05}$ = InvNorm (0.975) = 1,96 .

L'intervalle de fluctuation au seuil asymptotique de 95% est $I = [0{,}17 - 1{,}96.\dfrac{\sqrt{0{,}17\times 0{,}83}}{\sqrt{40}}\ ;\ 0{,}17 + 1{,}96.\dfrac{\sqrt{0{,}17\times 0{,}83}}{\sqrt{40}}\,]$,

$I = [0{,}054\,;0{,}286]$.

- Soit $\alpha = 0{,}10$: $p(-u_{0,10} \leq Z \leq u_{0,10}) = 0{,}90 \Leftrightarrow p(Z \leq u_{0,10}) - p(Z \leq u_{-0,10}) = 0{,}90$,
  $p(Z \leq u_{0,10}) - [1 - p(Z \leq u_{0,10})] = 0{,}90 \Leftrightarrow p(Z \leq u_{0,05}) = 0{,}950$.

La calculatrice donne : $u_{0,10}$ = InvNorm (0.950) = 1,645 .

L'intervalle de fluctuation au seuil asymptotique de 90% est $I = [0{,}17 - 1{,}645.\dfrac{\sqrt{0{,}17\times 0{,}83}}{\sqrt{40}}\ ;\ 0{,}17 + 1{,}645.\dfrac{\sqrt{0{,}17\times 0{,}83}}{\sqrt{40}}\,]$,

$I = [0{,}072\,;0{,}268]$.

2/ Une association de consommateurs effectue un test sur 40 personnes ayant ce modèle de téléviseur.
Dans cet échantillon, 11 personnes ont eu une panne dans les 5 ans suivant leur achat.
Doit-on rejeter l'affirmation du constructeur ?

La proportion de panne constatée est $f = \dfrac{11}{40} \approx 0{,}275$.

L'affirmation du constructeur est acceptable au risque de 5% , mais doit être rejetée au risque de 10% .

***<u>Explication</u>* :**

« Etre acceptée au risque de 10% » signifie qu'en fixant la marge de tolérance à 45% de part et d'autre de la proportion annoncée par le constructeur (seuil de 90%), la proportion constatée dans l'échantillon n'entre pas dans la plage de tolérance (rejeté : 5% avant le minimum accepté et 5% au-delà du maximum).

Il est à noter que cette plage de* 10% *n'est pas à interpréter en valeur :* $I = [0,17 - 0,17\times\frac{45}{100}\ ;\ 0,17 + 0,17\times\frac{45}{100}]$ *, soit

$I = [0,0935\ ;\ 0,2465]$ *, mais en répartition de probabilité selon la loi normale (forme en cloche autour de la valeur centrale)*.

« Etre acceptée au risque de 5% » signifie qu'en fixant la marge de tolérance à 47,5% de part et d'autre de la proportion annoncée par le constructeur, la proportion constatée dans l'échantillon entre dans la plage de tolérance avec ce résultat (rejeté : 2,5% avant le minimum accepté et 2,5% au-delà du maximum).

$I_2 = [0,054\ ;\ 0,286]$: $0,054\times40 \leq N \leq 0,286\times40 \iff 2,16 \leq N \leq 11,44$.

Seule la borne supérieure nous intéresse. Il ne faut pas dépasser 12 pannes, en 5 ans, sur 40 téléviseurs, pour que l'affirmation du constructeur puisse rester crédible.

3/ L'association pense maintenant effectuer un test sur 200 personnes. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence de panne pour un échantillon de 200 téléviseurs.

$n = 200$: $I = [0,17 - 1,96.\frac{\sqrt{0,17\times0,83}}{\sqrt{200}}\ ;\ 0,17 + 1,96.\frac{\sqrt{0,17\times0,83}}{\sqrt{200}}] = [0,118\ ;\ 0,222]$.

***<u>Explication</u>* :**

On constate que pour $n = 40$, $I_1 = [0,054\ ;\ 0,286]$ et pour $n = 200$, $I_2 = [0,118\ ;\ 0,222]$.

L'intervalle asymptotique est donc considérablement rétréci, bien que le seuil soit toujours fixé à 95%.

Ceci s'explique par le fait que pour un échantillon de taille réduite, la fréquence f constatée dans l'échantillon peut plus couramment s'écarter de la proportion théorique attendue, que ce n'est le cas dans un échantillon de taille plus importante, où les cas particuliers dans un sens se compensent avec les cas particuliers dans l'autre sens (loi des grands nombres).

Interpréter le résultat en fonction du nombre N de pannes décelées sur les 200 téléviseurs.

$I_2 = [0,118\ ;\ 0,222]$: $0,118\times200 \leq N \leq 0,222\times200 \iff 23,6 \leq N \leq 44,4$.

Seule la borne supérieure nous intéresse. Il ne faut pas dépasser 45 pannes en 5 ans, sur 200 téléviseurs, pour que l'affirmation du constructeur puisse rester crédible.