Un concours organise une épreuve de QCM de 300 questions, où on donne le choix à chaque fois entre deux réponses, dont une seule est juste.

Le service du concours désire savoir à partir de combien de réponses justes on pourra considérer qu'un candidat n'a pas répondu totalement au hasard.

1/ On appelle p la probabilité qu'un candidat répondant au hasard à une question ait trouvé la bonne réponse.

a) Que vaut p ?

Le candidat possède une chance sur deux de trouver la bonne réponse, soit $p = \frac{1}{2}$.

b) On appelle X le nombre de bonnes réponses obtenues par un candidat ayant répondu au hasard à toutes les questions. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique de X au seuil de 0,95 .

X suit la loi binomiale $B(n\,;p) = B(300\,;0{,}5)$.

Vérifions tout d'abord si les conditions d'utilisation de l'intervalle de fluctuation sont réunies, c'est-à-dire l'assimilation d'une loi binomiale à une loi normale : $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, toutes les trois vérifiées.

Si Z suit la loi normale centrée réduite $N(\mu\,;\sigma^2) = N(0\,;1)$, alors on a $p(-1{,}96 \leq Z \leq 1{,}96) \geq 0{,}95$.

Lorsque les conditions précédentes sont réalisées, on peut considérer que $Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ suit $N(0\,;1)$.

Pour $n = 300$ et $p = \frac{1}{2}$: $Z = \frac{X - 150}{\sqrt{75}} \Rightarrow p(-1{,}96 \leq \frac{X-150}{\sqrt{75}} \leq 1{,}96) \geq 0{,}95$,

soit $p(150 - 1{,}96\sqrt{75} \leq X \leq 150 - 1{,}96\sqrt{75}\,) \geq 0{,}95 \Leftrightarrow p(133 \leq X \leq 167) \geq 0{,}95$.

En posant $F_n = \frac{X_n}{n} = \frac{X}{300}$, on déduit $I = [\frac{133}{300}\,;\frac{167}{300}] = [0{,}443\,;0{,}557]$.

<u>*Plus directement*</u> :

$F = \frac{X}{n}$ appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95% : $I_n = [p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]$,

soit $I = [0{,}5 - 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}25}}{\sqrt{300}}\,;0{,}5 + 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}25}}{\sqrt{300}}] = [0{,}443\,;0{,}557]$.

c) On décide de prendre comme valeur minimale du nombre de réponses justes, pour attribuer un note non nulle à la copie, le plus petit entier n_0 qui dépasse la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation. Déterminer n_0 .

On doit refaire ce qui a été fait dans la 1ère méthode :

$0{,}443 \leq \frac{X}{n} \leq 0{,}557 \Leftrightarrow 0{,}443 \leq \frac{X}{300} \leq 0{,}557 \Leftrightarrow 133 \leq X \leq 167$.

Avec une marge d'erreur de 5%, on peut considérer qu'un candidat qui répond au hasard aux 300 questions, répondra juste entre 133 et 167 de ces questions.

Donc $n_0 = 168$.

Tout candidat que répondra juste à au moins 168 questions sur 300, aura une note positive.

2/ Reprendre l'étude du 1/ avec des questions comportant chacune quatre réponses.

$n = 300$ et $p = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

$F = \frac{X}{n}$ appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95% : $I_n = [p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,;\, p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]$,

soit $I = [0{,}25 - 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}25\times 0{,}75}}{\sqrt{300}} \,;\, 0{,}25 + 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}25\times 0{,}75}}{\sqrt{300}}\,] = [0{,}201 \,;\, 0{,}299]$.

$0{,}201 \leq \frac{X}{n} \leq 0{,}299 \Leftrightarrow 0{,}201 \leq \frac{X}{300} \leq 0{,}299 \Leftrightarrow 60{,}3 \leq X \leq 89{,}7$.

D'où : $n_0 = 90$.