On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, matrice carrée 2×2 .

1/ Calculer A^2 et A^3 .

$A^2 = A\times A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$.

7 s'obtient en multipliant la 1ère ligne par la 1ère colonne : $3\times3 + 1\times(-2) = 9 - 2 = 7$,

-6 s'obtient en multipliant la 2ème ligne par la 1ère colonne : $(-2)\times3 + 0\times(-2) = -6$,

3 s'obtient en multipliant la 1ère ligne par la 2ème colonne : $3\times1 + 1\times0 = 3$,

-2 s'obtient en multipliant la 2ème ligne par la 2ème colonne : $(-2)\times1 + 0\times0 = -2$.

$A^3 = A^2\times A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 7 \\ -14 & -6 \end{pmatrix}$.

2/ Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible, et calculer P^{-1} .

<u>1ère méthode (théorique)</u> :

On cherche la matrice $P^{-1}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ telle que $P\times P^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

D'où : $\begin{cases} a + b = 1 \\ -a - 2b = 0 \end{cases}$ de solution $(a ; b) = (2 ; -1)$, et $\begin{cases} c + d = 0 \\ -c - 2d = 1 \end{cases}$ de solution $(c ; d) = (1 ; -1)$.

On déduit l'existence de P^{-1} , donc que P est inversible, et $P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Il est aisé de vérifier que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>2ème méthode</u> :

Une matrice carrée est inversible si son déterminant (produit croisé en 2×2) est non nul :

det $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, noté $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$.

On constate que $\det P = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1\times(-2) - (-1)\times1 = -1$ non nul. La matrice P est inversible.

Dans ce cas $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{\det P} & -\frac{c}{\det P} \\ -\frac{b}{\det P} & \frac{a}{\det P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Démontrer que la matrice $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.

$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$, matrice diagonale, puisque seule sa diagonale principale est de coefficients non nuls.

c) Démontrer que l'on a $A = PDP^{-1}$.

Un produit de matrices n'est en général pas commutatif, soit : $A \times B \neq B \times A$.

Il ne faut donc pas intervertir l'ordre des matrices.

$D = P^{-1}AP \Leftrightarrow PD = P(P^{-1}AP) = (PP^{-1})AP = IAP = AP \Leftrightarrow PDP^{-1} = (AP)P^{-1} \Leftrightarrow PDP^{-1} = A(PP^{-1}) = AI = A$.

3/ Démontrer que l'on a $A^n = PD^nP^{-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode rapide :

$A^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1})\ldots(PDP^{-1})$, n fois.

$A^n = PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D(P^{-1}P)\ldots(P^{-1}P)DP^{-1} = PD\boldsymbol{I}D\boldsymbol{I}D\boldsymbol{I}..\boldsymbol{I}DP^{-1} = PDD..DDP^{-1} = PD^nP^{-1}$.

Démonstration rigoureuse, par récurrence :

Soit la proposition P_n « $A^n = PD^nP^{-1}$ » , avec n entier naturel.

a) *Initialisation*

P_1 est vrai, car $A = A^1 = PDP^{-1} = PD^1P^{-1}$.

b) *Hérédité*

Supposons P_n vrai ($A^n = PD^nP^{-1}$). Peut-on en déduire P_{n+1} vrai ($A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$) ?

$A^n = PD^nP^{-1} \Leftrightarrow A^{n+1} = A \times A^n = (PDP^{-1})(PD^nP^{-1}) = (PD)(P^{-1}P)(D^nP^{-1}) = (PD)I(D^nP^{-1}) = P(DD^n)P^{-1}$,

$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

On a prouvé que P_{n+1} *est vraie, dès que* P_n *l'est.*

c) *Conclusion* : P_n est vraie pou tout n entier naturel non nul.

En déduire l'expression de A^n , puis vérifier que le résultat obtenu est cohérent avec les résultats du 1/ .

Par une autre récurrence, on peut aisément montrer que $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{2^n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2^n} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2^n} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ -2^{n+1} + 2 & -2^n + 2 \end{pmatrix}$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 2^3 - 1 & 2^2 - 1 \\ -2^3 + 2 & -2^2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$, vérifié.

$A^3 = \begin{pmatrix} 2^4 - 1 & 2^3 - 1 \\ -2^4 + 2 & -2^3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 7 \\ -14 & -6 \end{pmatrix}$, vérifié.