On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **la matrice identité de l'ensemble des matrices d'ordre 3 .**

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **.**

1/ On pose $B = A - I$. Calculer B^2 et B^3 .

$$B = A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>*Rappel*</u> : Pour multiplier deux matrices, on prend l'image par la 1ère matrice de chaque vecteur colonne de la seconde matrice, l'un après l'autre, un peut comme si on faisait successivement $f(\overrightarrow{u})$, $f(\overrightarrow{v})$ et $f(\overrightarrow{w})$.

Ainsi : Pour calculer $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on fait : $\begin{pmatrix} \underline{0 \quad 1 \quad 1} \\ 0 \quad 0 \quad 1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0\times\mathbf{0} + 1\times\mathbf{0} + 1\times\mathbf{0}} \\ 0\times0 + 0\times0 + 1\times0 \\ 0\times0 + 0\times0 + 0\times0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On procède ensuite à l'identique pour les deux autres vecteurs colonne de la matrice B .

On obtient : $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De même $B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, matrice nulle.

2/ On souhaite calculer $A^n = (B + I)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Peut-on utiliser la formule du binôme de Newton pour développer $(B + I)^n$? Justifier la réponse.

On pourrait penser que le binôme de Newton n'est pas utilisable car le produit de matrice n'est en général pas commutatif, soit $A \times B \neq B \times A$, sauf cas particulier.

Cependant, la matrice unité I commute dans son produit avec toute autre matrice carrée, soit $A \times I = I \times A = A$.

On peut donc utiliser la formule du binôme de Newton.

b) Démontrer que pour tout $n \geq 3$, on a $A^n = (B + I)^n = \binom{n}{0} I + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2$.

$$A^n = (B + I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k \times I^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k = \binom{n}{0} I + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2 + \binom{n}{3} B^3 + \binom{n}{4} B^4 + \binom{n}{5} B^5 + \ldots.$$

Comme $B^3 = \overline{0}$, matrice nulle, on déduit que $B^n = \overline{0}$, pour tout $n \geq 3$.

On déduit : $A^n = (B + I)^n = \binom{n}{0} I + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2$.

En déduire l'expression de A^n pour tout $n \geq 3$.

$$A^n = (B + I)^n = \binom{n}{0} I + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2 = 1.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$