Calculer les intégrales suivantes :

a) $\boldsymbol{A = \int_0^1 \frac{5}{2x-3}\,dx}$ **.**

$u = 2x - 3 \Rightarrow u' = 2$. D'où : $\frac{u'}{u} = \frac{2}{2x-3}$ admet pour primitive $\ln|u| = \ln|2x-3|$.

$A = \int_0^1 \frac{5}{2x-3}\,dx = \frac{5}{2}\int_0^1 \frac{2}{2x-3}\,dx = \frac{5}{2}\left[\ln|2x-3|\right]_0^1 = \frac{5}{2}(\ln|-1| - \ln|-3|) = \frac{5}{2}(\ln 1 - \ln 3) = -\frac{5}{2}\ln 3$.

<u>Remarque</u> : *Les primitives de* $\frac{u'}{u}$ *sont* $\ln|u| + k$ *et non* $\ln u + k$.

Preuve : Si $u > 0$, $\ln|u| = \ln u$, de dérivée $\frac{u'}{u}$.

Si $u < 0$, $\ln|u| = \ln(-u)$, de dérivée $\frac{-u'}{-u} = \frac{u'}{u}$.

Donc les primitives de $\frac{u'}{u}$ sont $\ln u + k$ si $u > 0$, mais tout autant $\ln(-u) + k$, si $u < 0$.

On conclue que les primitives de $\frac{u'}{u}$ sont $\ln|u| + k$.

b) $\boldsymbol{B = \int_0^1 \sqrt{e^x}\,dx}$

$\sqrt{e^x} = (e^x)^{1/2} = e^{x/2}$. par ailleurs $(e^u)' = u'.e^u$, soit $(e^{x/2})' = \frac{1}{2}e^x$.

$\int_0^1 \sqrt{e^x}\,dx = 2\int_0^1 \frac{1}{2}e^{x/2}\,dx = 2\left[e^{x/2}\right]_0^1 = 2(e^{1/2} - e^0) = 2(\sqrt{e} - 1)$.

c) $\boldsymbol{C = \int_1^2 \frac{1}{x}(\ln x)^3\,dx}$

On sait que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ et les primitives de $u^n u'$ égales à $\frac{u^{n+1}}{n+1} + k$, si $n \neq -1$.

$\frac{1}{x}(\ln x)^3 = u'.u^3$ de primitives $\frac{1}{4}u^4 + k$, d'où : $\int_1^2 \frac{1}{x}(\ln x)^3\,dx = \frac{1}{4}\left[(\ln x)^4\right]_1^2 = \frac{1}{4}((\ln 2)^4 - (\ln 1)^4) = \frac{1}{4}\ln^4 2$.

d) $\boldsymbol{D = \int_{-\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x - 2}\,dx}$

On sait que $(\sin x - 2)' = \cos x$ et que les primitives de $\frac{u'}{u}$ sont $\ln|u| + k$.

$\int_{-\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x - 2}\,dx = \left[\ln|\sin x - 2|\right]_{-\pi/4}^{\pi/2} = \ln\left|\sin\frac{\pi}{2} - 2\right| - \ln\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 2\right| = \ln|1-2| - \ln\left|-\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\right| = \ln 1 - \ln\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$\int_{-\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x - 2}\,dx = \ln\frac{4+\sqrt{2}}{2}$.

e) $\boldsymbol{E = \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx}$

On sait que $(e^u)' = u'e^u$, soit $(e^x + e^{-x}) = e^x - e^{-x}$.

Les primitives de $\dfrac{u'}{u}$ sont $\ln|u| + k$, d'où : $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = [\ln|e^x + e^{-x}|]_0^1 = [\ln(e^x + e^{-x})]_0^1 = \ln(e^1 + e^{-1}) - \ln 2$,

$\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \ln\left(e + \frac{1}{e}\right) - \ln 2 = \ln\frac{e^2+1}{e} - \ln 2 = \ln\left(\frac{e^2+1}{2e}\right)$.

f) $\boldsymbol{F = \int_{-1}^{1} x.\,e^{x^2}\,dx}$

On sait $(e^u)' = u'.e^u$, soit $\left(e^{x^2}\right)' = 2x.\,e^{x^2}$.

$\displaystyle\int_{-1}^{1} x.\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 2x.\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\,e^{x^2}\,\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(e^1 - e^1) = 0$.

Remarque : *On pouvait remarquer que la fonction* $f(x) = x.\,e^{x^2}$ est *impaire* ($f(-x) = -f(x)$) , donc sa courbe représentative symétrique par rapport à l'origine O .

En conséquence, le domaine d'intégration [-1 ; +1] étant lui-même symétrique par rapport à 0 , l'intégrale est nulle.