On considère la fonction f définie sur $I = [-5\ ;\ +5]$ par $f(x) = 3 + \dfrac{1 - x}{x^2 + 1}$.

Etudier les variations de f sur I .

La fonction f est définie pour tout $x \in [-5\ ;\ +5]$ puisque le dénominateur $x^2 + 1$ n'est jamais nul.

*L*a fonction f est donc <u>continue</u> sur $[-5\ ;\ +5]$, et pour toutes valeurs réelles de a et b , prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$, sans « sauter » aucune ordonnée intermédiaire.

$f(-5) = \dfrac{42}{13} \approx 3{,}23$ et $f(+5) = \dfrac{37}{13} \approx 2{,}85$.

On sait que $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, d'où : $f(x) = 3 + \dfrac{1 - x}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = 0 + \dfrac{(-1)(x^2 + 1) - 2x(1 - x)}{(x^2 + 1)^2}$.

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x^2 + 1)^2}$.

Recherche des extremum :

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1$, de racines $x_1 = 1 - \sqrt{2} \approx -0{,}41$ et $x_2 = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}41$.

Les ordonnées des extremum sont $y_1 = f(1 - \sqrt{2}) = \dfrac{7 + \sqrt{2}}{2} \approx 4{,}21$ et $y_2 = f(1 + \sqrt{2}) = \dfrac{7 - \sqrt{2}}{2} \approx 2{,}79$.

Signe de la dérivée :

$f'(x)$ est du signe du trinôme $x^2 - 2x - 1$ (positive à l'extérieur des racines).

Tableau de variation :

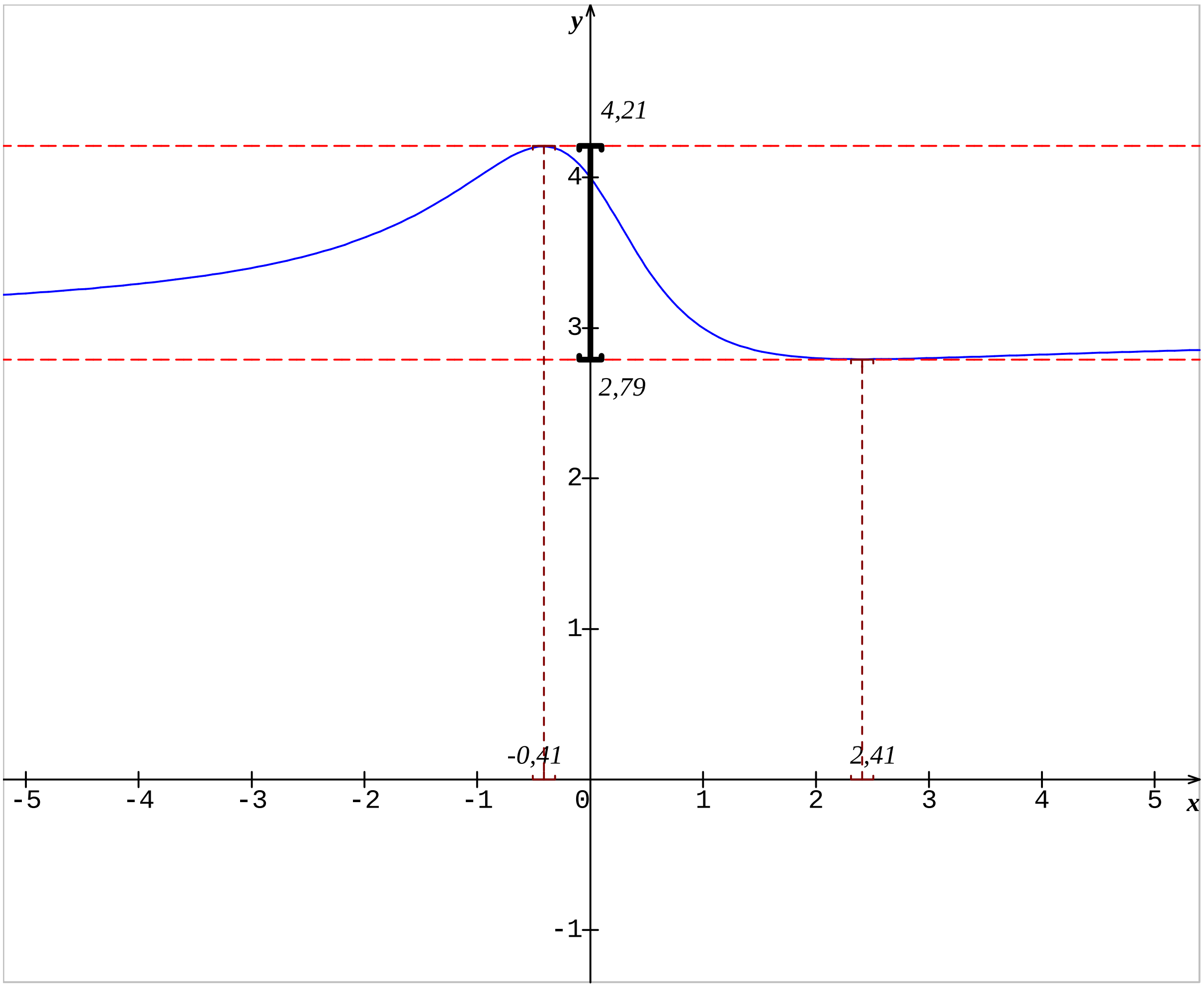
x	-5		$1 - \sqrt{2}$		$1 + \sqrt{2}$		$+5$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$	$\dfrac{42}{13}$	↗	$\dfrac{7 + \sqrt{2}}{2}$	↘	$\dfrac{7 - \sqrt{2}}{2}$	↗	$\dfrac{37}{13}$

En déduire un encadrement de $f(x)$ sur I .

x	-5		$1 - \sqrt{2}$		$1 + \sqrt{2}$		$+5$
$f(x)$	3,23	↗	4,21	↘	2,79	↗	2,85

$$\begin{cases} \text{Le minimum absolu est } y_{mini} = \dfrac{7 - \sqrt{2}}{2} \approx 2{,}79 \text{ , atteint en } 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}41 \\ \text{Le maximum absolu est } y_{Max} = \dfrac{7 + \sqrt{2}}{2} \approx 4{,}21 \text{ , atteint en } 1 - \sqrt{2} \approx -0{,}41 \end{cases} .$$

Conclusion : $-5 \le x \le +5 \Rightarrow \dfrac{7 - \sqrt{2}}{2} \le f(x) \le \dfrac{7 + \sqrt{2}}{2}$.



y
4,21
4
3
2,79
2
1
-0,41
2,41
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
x
-1