Après étude de la fonction $f(x) = x^3 - 3x + 3$, encadrer $f(x)$ sur l'intervalle $[-\frac{3}{2} ; \frac{5}{2}]$.

Remarque : Comme tout polynôme, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc pour toutes valeurs réelles de a et b, prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$, sans « sauter » aucune ordonnée intermédiaire.

Etablissons un rapide tableau de variation de la fonction f.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x + 1)(x - 1)$.

La fonction f présente deux extremum : $\begin{cases} \text{en } x = -1 \text{ , d'ordonnée } y = f(-1) = +5 \\ \text{en } x = +1 \text{ , d'ordonnée } y = f(+1) = +1 \end{cases}$.

La dérivée $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 1$.

Tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+5$	↘	$+1$	↗	$+\infty$

Sur $[-\frac{3}{2} ; -1]$: f est croissante, donc présente $\begin{cases} \text{un minimum d'ordonnée } f(-\frac{3}{2}) = \frac{33}{8} = 4{,}125 \\ \text{un maximum d'ordonnée } f(-1) = 5 \end{cases}$.

Donc $-\frac{3}{2} \le x \le -1 \Rightarrow 4{,}125 \le f(x) \le 5$.

Sur $[-1 ; +1]$: f est décroissante, donc présente $\begin{cases} \text{un maximum d'ordonnée } f(-1) = 5 \\ \text{un minimum d'ordonnée } f(1) = 1 \end{cases}$.

Donc $-1 \le x \le +1 \Rightarrow 1 \le f(x) \le 5$.

Sur $[+1 ; +\frac{5}{2}]$: f est croissante, donc présente $\begin{cases} \text{un minimum d'ordonnée } f(+1) = 1 \approx 4{,}125 \\ \text{un maximum d'ordonnée } f(+\frac{5}{2}) = +\frac{89}{8} = 11{,}125 \end{cases}$.

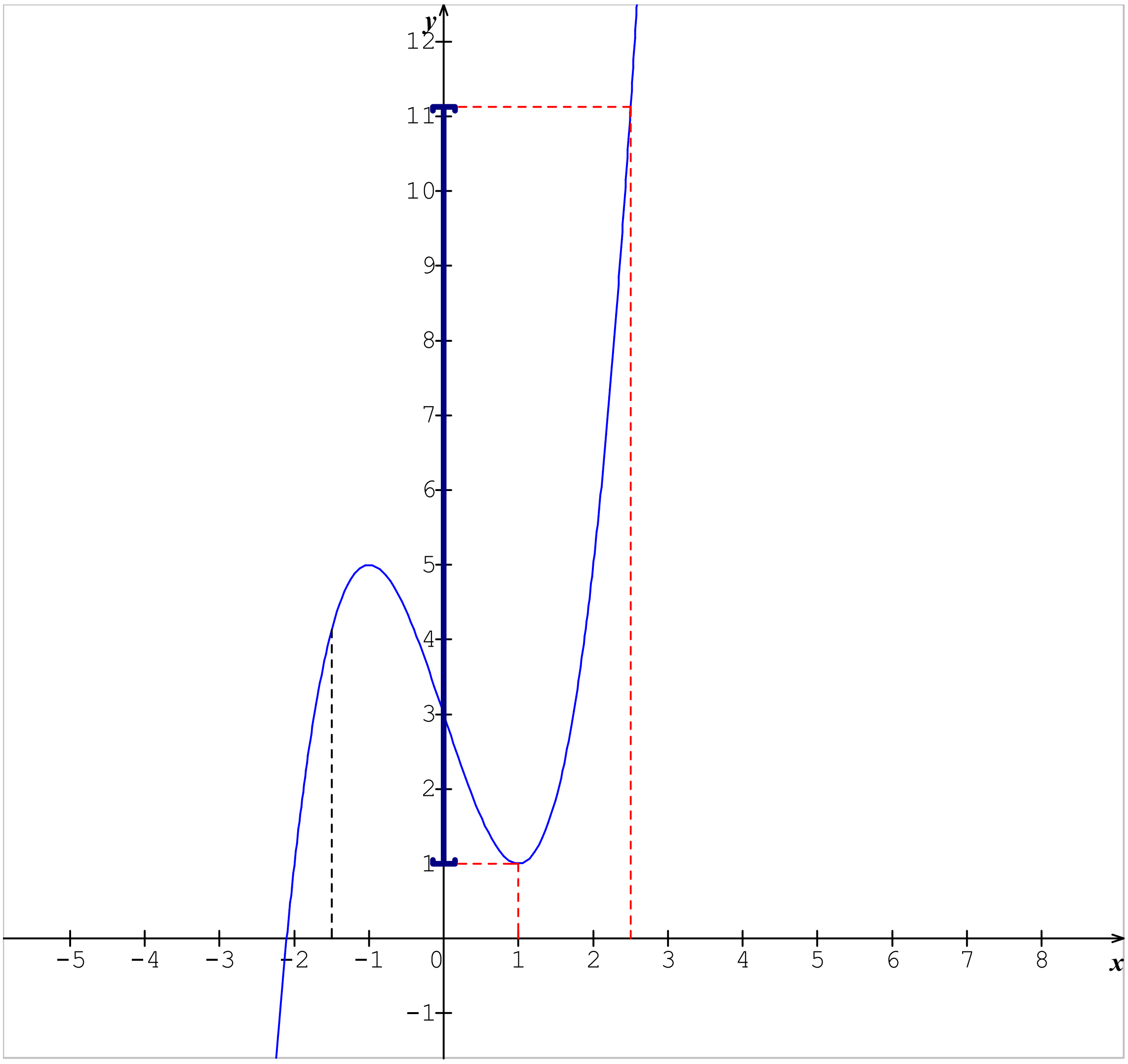
Donc $+1 \le x \le +\frac{5}{2} \Rightarrow 1 \le f(x) \le 11{,}125$.

Synthèse :

On constate que le minimum absolu est $y_1 = 1$, et le maximum absolu $y_2 = 11{,}125$.

Donc : $-\frac{3}{2} \le x \le +\frac{5}{2} \Rightarrow 1 \le f(x) \le 11{,}125$.

Vérification graphique :



y
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
x