Résoudre les systèmes suivants, par la méthode par substitution et par addition :

1/ $\begin{cases} \mathbf{x + y = 5} \\ \mathbf{3x - y = 4} \end{cases}$.

a) *Par Substitution* :

Calculons y en fonction de x dans la 1ère équation : $x + y = 5 \Leftrightarrow y = 5 - x$.

Reportons cette écriture de y dans la 2ème équation : $3x - y = 4 \Leftrightarrow 3x - (5 - x) = 4 \Leftrightarrow 3x - 5 + x = 4$,

$3x + x = 5 + 4 \Leftrightarrow 4x = 9 \Leftrightarrow x = +\frac{9}{4}$.

On déduit $y = 5 - x = 5 - \frac{9}{4} = \frac{20}{4} - \frac{9}{4} \Leftrightarrow y = +\frac{11}{4}$.

Le système admet pour solution le couple unique $(x\ ;\ y) = (+\frac{9}{4}\ ;\ +\frac{11}{4})$.

b) *Par Combinaison Linéaire (Addition)* :

Le système proposé se prête bien à cette méthode, car en additionnant en colonnes, on obtient directement $4x = 9$ *, les y s'éliminant dans l'addition.*

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} x + y = 5 \\ 4x = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ x = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{9}{4} + y = 5 \\ x = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{20}{4} - \frac{9}{4} \\ x = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{11}{4} \\ x = \frac{9}{4} \end{cases} .$$

Le système admet pour solution le couple unique $(x\ ;\ y) = (+\frac{9}{4}\ ;\ +\frac{11}{4})$.

Vérification :

Il est toujours judicieux de vérifier la solution en reportant les valeurs de x *et* y *dans les équations initiales.*

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{9}{4} + \frac{11}{4} = 5 \\ \frac{27}{4} - \frac{11}{4} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{20}{4} = 5 \\ \frac{16}{4} = 4 \end{cases}$$, système vérifié.

2/ $\begin{cases} \mathbf{2x + y = -3} \\ \mathbf{x + 6y = 1} \end{cases}$.

a) *Par Substitution* :

Calculons y en fonction de x dans la 1ère équation : $2x + y = -3 \Leftrightarrow y = -3 - 2x$.

Remarque : *Le choix de* y *en fonction de* x *est dû au fait que* y *ne comporte pas de facteur numérique.*

Si la ligne avait été $x + 2y = -3$ *, on aurait choisi* $x = -3 - 2y$.

Reportons cette écriture de y dans la 2ème équation : $x + 6y = 1 \Leftrightarrow x + 6(-3 - 2x) = 1 \Leftrightarrow x - 18 - 12x = 1$,

$x - 12x = 18 + 1 \Leftrightarrow -11x = 19 \Leftrightarrow x = -\frac{19}{11}$.

On déduit $y = -3 - 2x = -3 + \frac{38}{11} = -\frac{33}{11} + \frac{38}{11} = +\frac{5}{11}$.

Le système admet pour solution le couple unique $(x\ ;\ y) = (-\frac{19}{11}\ ;\ +\frac{5}{11})$.

b) *Par Combinaison Linéaire (Addition)* :

Il faut qu'en additionnant en colonnes, l'une des inconnues, x ou y s'élimine. (certains préfèrent soustraire).

En multipliant la 2ème ligne par -2 *, on obtiendra* $-2x$ *, qui additionné avec le* $2x$ *de la 1ère ligne, éliminera les* x .

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x + 6y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ -2L_2 \end{matrix}\begin{cases} 2x + y = -3 \\ -2x - 12y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ -2L_2 + L_1 \end{matrix}\begin{cases} 2x + y = -3 \\ -11y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = -3 \\ y = +\dfrac{5}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \dfrac{5}{11} = -3 \\ y = +\dfrac{5}{11} \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2x = -3 - \dfrac{5}{11} \\ y = +\dfrac{5}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -\dfrac{33}{11} - \dfrac{5}{11} \\ y = +\dfrac{5}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -\dfrac{38}{11} \\ y = +\dfrac{5}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{19}{11} \\ y = +\dfrac{5}{11} \end{cases}.$$

Le système admet pour solution le couple unique $(x\,;y) = (-\frac{19}{11}\,; +\frac{5}{11})$.

<u>*Remarque*</u> :

Lorsque l'habitude vient, on peut accélérer la présentation :

$\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x + 6y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = -3 \\ -2x - 12y = -2 \end{cases} \Rightarrow -11y = -5$, soit $y = +\frac{5}{11}$.

On reporte $y = +\frac{5}{11}$ dans $x + 6y = 1$: $x + \frac{30}{11} = 1 \Leftrightarrow x = 1 - \frac{30}{11} = \frac{11}{11} - \frac{30}{11}$, soit $x = -\frac{19}{11}$.

Le système admet pour solution le couple unique $(x\,;y) = (-\frac{19}{11}\,; +\frac{5}{11})$.

Vérification :

$\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x + 6y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{38}{11} + \dfrac{5}{11} = -3 \\ -\dfrac{19}{11} + \dfrac{30}{11} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{33}{11} = -3 \\ \dfrac{11}{11} = 1 \end{cases}$, système vérifié.