Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \to f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

On rappelle que $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

1/ A partir de cette formule théorique, calculer $f'(-2)$.

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left[(-2+h) + \dfrac{1}{-2+h}\right] - (-2 - \dfrac{1}{2})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{2} + h - \dfrac{1}{2-h}}{h},$$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \times \frac{(2-h) + 2h(2-h) - 2}{2(2-h)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \times \frac{3h - 2h^2}{2(2-h)} = \lim_{h \to 0} \frac{3 - 2h}{2(2-h)}, \text{ soit } f'(1) = +\frac{3}{4}.$$

2/ Toujours à partir de cette formule, calculer $f'(x)$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left[(x+h) + \dfrac{1}{x+h}\right] - (x + \dfrac{1}{x})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-\dfrac{1}{x} + h + \dfrac{1}{x+h}}{h},$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{-(x+h) + hx(x+h) + x}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{-h + h^2x + hx^2}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \times \frac{-h + h^2x + hx^2}{x(x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1 + hx + x^2}{x(x+h)} = \frac{-1 + x^2}{x^2}.$$

Conclusion : $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$, d'où $f'(-2) = 1 - \dfrac{1}{4} = +\dfrac{3}{4}$.

On remarquera que l'objectif est toujours de simplifier la division par h .

3/ A partir de la formule de dérivation adaptée, retrouver ces résultats.

On sait que $(x)' = 1$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ et $(u + v)' = u' + v'$.

$f'(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)' = 1 - \dfrac{1}{x^2}$, d'où les résultats trouvés.