X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n\ ;\ p) = B(400\ ;\ 0{,}2)$. On pose $Z = \dfrac{X - 80}{8}$.

1/ Pour quelles valeurs de X a-t-on respectivement $Z = -2$ et $Z = 2$?

$Z = -2 \iff \dfrac{X - 80}{8} = -2 \iff X - 80 = -16 \iff X = 64$.

$Z = 2 \iff \dfrac{X - 80}{8} = 2 \iff X - 80 = 16 \iff X = 96$.

2/ Calculer la probabilité p pour que Z soit compris entre -2 et 2 .

$p(-2 \leq Z \leq 2) = p(64 \leq X \leq 96) = p(X \leq 96) - p(X \leq 64) \approx 0{,}97861 - 0{,}02407 = 0{,}95454$.

calculs faits avec l'opérateur binomcdf(n , p , x) = binomcdf(400 , 0,2 , x) *sur calculatrice* TI .

3/ Expliquer pourquoi $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$ est une valeur approchée de p .

On remarquera que $E(X) = \mu = n.p = 400 \times 0{,}2 = 80$ et $\sigma(X) = \sigma = \sqrt{n.p.(1-p)} = \sqrt{400 \times 0{,}2 \times 0{,}8} = \sqrt{64} = 8$.

Le changement de variable $Z = \dfrac{X - 80}{0{,}8} = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ permet d'approcher la loi binomiale par la loi normale centrée réduite, sous réserves de $n \geq 30$, $n.p \geq 5$, $n.p.(1-p) \geq 5$, ce qui est vérifié.

Calculer cette valeur approchée à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice.

$p(-2 \leq Z \leq 2)$ est calculé de façon approchée en supposant que $Z = N(0\ ;\ 1)$.

Sur calculatrice TI : $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \approx p(-2 \leq X \leq 2) = 0{,}95450$.

4/ Donner une valeur arrondie au dix-millième de l'erreur commise par cette approximation.

L'erreur $|0{,}95454 - 0{,}95450| = 0{,}00004$ est d'environ 4 cent-millièmes, arrondie à 1 dix-millième.