1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'équations $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = -2 \end{cases}$.

Méthode actuelle :

On constate tout d'abord que $x = 0$ ne peut être solution, puisque $xy = -2$.

$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy = 7x \\ xy = -2 \end{cases}$ en multipliant la 1ère ligne par x (la remarque sur $x = 0$ permet de s'assurer qu'on n'apporte pas de nouvelle solution en faisant cette multiplication par x) .

On déduit : $x^2 - 2 = 7x \Leftrightarrow x^2 - 7x - 2 = 0$.

a et c sont de signes contraires, donc il y a deux racines distinctes,

$\Delta = b^2 - 4ac = 49 + 8 = 57$. Les racines sont $x_1 = \dfrac{7-\sqrt{57}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{7+\sqrt{57}}{2}$.

Si $x_1 = \dfrac{7-\sqrt{57}}{2}$, alors $xy = -2 \Rightarrow y = \dfrac{-2}{\dfrac{7-\sqrt{57}}{2}} = -\dfrac{4}{7-\sqrt{57}} = -\dfrac{4(7+\sqrt{57})}{(7-\sqrt{57})(7+\sqrt{57})} = -\dfrac{4(7+\sqrt{57})}{49-57} = \dfrac{-4(7+\sqrt{57})}{-8}$,

$y_1 = \dfrac{7+\sqrt{57}}{2}$.

De même, si $x_2 = \dfrac{7+\sqrt{57}}{2}$, on obtient $y_2 = \dfrac{7-\sqrt{57}}{2}$.

Il existe deux couples $(x ; y)$ solutions $\left(\dfrac{7-\sqrt{57}}{2} ; \dfrac{7+\sqrt{57}}{2}\right)$ et $\left(\dfrac{7+\sqrt{57}}{2} ; \dfrac{7-\sqrt{57}}{2}\right)$.

Remarque importante : Les rôles de x et y dans les couples solutions sont *permutables* , ce qui est normal car dans les équations initiales $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = -2 \end{cases}$, x et y ont également des rôles permutables.

Méthode ancienne, plus rapide :

Deux nombres a et b , de somme S et produit P , sont les solutions permutables de l'équation $X^2 - SX + P = 0$.

$S = x + y = 7$ et $P = xy = -2$, donc x et y sont les solutions de $X^2 - 7x - 2 = 0$.

On obtient pour racines $X_1 = \dfrac{7+\sqrt{57}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{7-\sqrt{57}}{2}$.

Il suffit de les permuter pour retrouver les deux couples $(x ; y)$ solutions

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'équations $\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 1 \end{cases}$.

x et y de somme $S = -3$ et de produit $P = 1$ sont les racines de l'équation $X^2 - SX + P = 0$.

$X^2 + 3X + 1 = 0$ admet pour discriminant $\Delta = 5$.

Les racines sont $X_1 = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

Le système admet deux couples solutions $(x ; y)$, $\left(\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} ; \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$ et $\left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} ; \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)$.