Soit dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points $A(-2\,;-1)$, $B(1\,;3)$ et $C(2\,;0)$.

Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

Le centre de gravité d'un triangle est le point de concours commun aux trois médianes du triangles, droites issues de chaque sommet, passant par le milieu du côté opposé.

<u>**1ère méthode**</u> **:**

On cherche une équation cartésienne de deux médianes, dont on cherche ensuite le point de concours G.

- <u>Soit D_1 la médiane issue de A passant par le milieu A' du côté $[BC]$</u> :

A' milieu de $[BC]$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{1+2}{2} = +\dfrac{3}{2} \\ y_{A'} = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{3+0}{2} = +\dfrac{3}{2} \end{cases}$, soit $A'(\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2})$.

Tout point $M(x\,;y)$ de la médiane D_1 vérifie $(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AA'})$ colinéaires $\Leftrightarrow ab' - ba' = 0$.

$\overrightarrow{AM}(x_M - x_A\,; y_M - y_A) = (x+2\,; y+1)$ et $\overrightarrow{AA'}(x_{A'} - x_A\,; y_{A'} - y_A) = (\frac{7}{2}\,;\frac{5}{2})$.

$(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AA'})$ colinéaires $\Leftrightarrow ab' - ba' = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}(x+2) - \frac{7}{2}(y+1) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}y + \frac{3}{2} = 0$.

La médiane D_1 admet pour équation cartésienne $D_1 : 5x - 7y + 3 = 0$.

- <u>Soit D_2 la médiane issue de C passant par le milieu C' du côté $[AB]$</u> :

C' milieu de $[AB]$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_{C'} = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-2+1}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ y_{C'} = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = +1 \end{cases}$, soit $C'(-\frac{1}{2}\,;1)$.

Tout point $M(x\,;y)$ de la médiane D_2 vérifie $(\overrightarrow{CM}\,;\overrightarrow{CC'})$ colinéaires $\Leftrightarrow ab' - ba' = 0$.

$\overrightarrow{CM}(x_M - x_C\,; y_M - y_C) = (x-2\,; y)$ et $\overrightarrow{CC'}(x_{C'} - x_C\,; y_{C'} - y_C) = (-\frac{5}{2}\,;1)$.

$(\overrightarrow{CM}\,;\overrightarrow{CC'})$ colinéaires $\Leftrightarrow ab' - ba' = 0 \Leftrightarrow 1(x-2) + \frac{5}{2}y = 0 \Leftrightarrow x + \frac{5}{2}y - 2 = 0$.

La médiane D_2 admet pour équation cartésienne $D_2 : 2x + 5y - 4 = 0$.

- <u>Soit $G(x\,;y)$ l'intersection de D_1 et D_2, centre de gravité du triangle ABC</u> :

$G(x\,;y) \in D_1 \cap D_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 7y + 3 = 0 \\ 2x + 5y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 7y = -3 \\ 2x + 5y = +4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x + 14y = 6 \\ 10x + 25y = 20 \end{cases}$, soit par addition $39y_G = 26$.

D'où $y_G = +\frac{26}{39} = +\frac{2}{3}$, que l'on reporte dans $2x + 5y = 4 \Leftrightarrow 2x + \frac{10}{3} = \frac{12}{3} \Leftrightarrow 2x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow y_G = +\frac{1}{3}$.

On déduit : $G(\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3})$.

<u>**2ème méthode**</u> **:**

Le centre de gravité G est situé au tiers de chaque médiane en partant de sa base, donc aux $\frac{2}{3}$ de cette médiane en partant de son sommet, soit $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G - x_C = \frac{2}{3}(x_{C'} - x_C) \\ y_G - y_C = \frac{2}{3}(y_{C'} - y_C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G - 2 = \frac{2}{3}(-\frac{5}{2}) \\ y_G = \frac{2}{3}(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 2 - \frac{5}{3} = +\frac{1}{3} \\ y_G = +\frac{2}{3} \end{cases}$.

On retrouve $G(\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3})$.