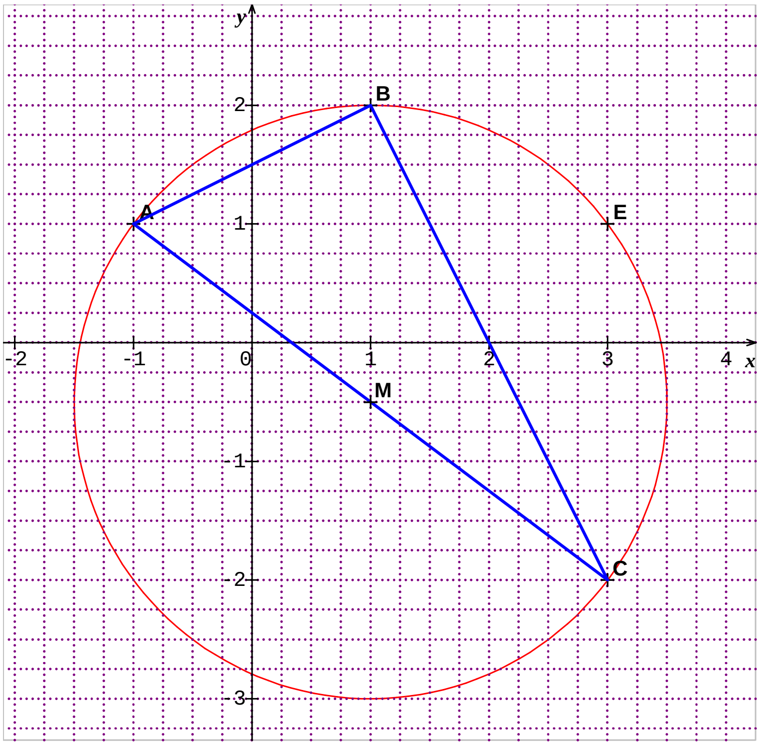
Dans un repère, on donne les points $A(-1 ; 1)$, $B(1 ; 2)$ et $C(3 ; -2)$.

Placer ces points dans un repère.



On peut conjecturer que le triangle ABC est rectangle en B .

M représente le centre Ω du cercle (C) .

1/ Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC .

$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (1 - (-1))^2 + (2 - 1)^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$, soit $AB = \sqrt{5}$.

$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (3 - (-1))^2 + (-2 - 1)^2 = 4^2 + (-3)^2 = 16 + 9 = 25$, soit $AC = \sqrt{25} = 5$.

$BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (3 - 1)^2 + (-2 - 2)^2 = 2^2 + (-4)^2 = 4 + 16 = 20$, soit $BC = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$.

Que peut-on en déduire sur la nature de ce triangle ?

On constate que $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

La réciproque du théorème de Pythagore prouve que le triangle ABC est rectangle en B , ce qui confirme la conjecture faite précédemment.

2/ Donner les coordonnées du centre Ω et le rayon R du cercle (C) circonscrit au triangle ABC .

Un triangle rectangle est inscrit dans un demi-cercle dont son hypoténuse est le diamètre.

Donc, Ω est le milieu de l'hypoténuse AC , soit $\begin{cases} x_\Omega = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-1 + 3}{2} = +1 \\ y_\Omega = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{1 + (-2)}{2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$, soit $\Omega(1 ; -\dfrac{1}{2})$.

Le rayon R du cercle est égal à la moitié de l'hypoténuse : $\mathrm{R} = \dfrac{AC}{2} = \Omega A = \Omega C = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$.

3/ Soit le point $E(3\ ;\ 1)$. Montrer que E appartient au cercle (C) .

Il suffit que le point E soit à une distance du centre Ω égale au rayon R :

$\Omega E^2 = (x_E - x_\Omega)^2 + (y_E - y_\Omega)^2 = (3-1)^2 + (1 - (-\frac{1}{2}))^2 = 2^2 + (\frac{3}{2})^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$, soit $\Omega E = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = \mathrm{R}$.

Le point $E(3\ ;\ 1)$ appartient bien au cercle (C) circonscrit au triangle ABC .

4/ calculer $\cos \widehat{C}$ et en déduire une valeur de l'angle $\widehat{C}$, arrondie au degré près.

Le cosinus d'un angle est le rapport du côté de l'angle droit adjacent à l'angle (adjacent = qui le touche), divisé par l'hypoténuse de l'angle : $\cos \widehat{C} = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. On obtient $\widehat{C} = \cos^{-1}(\frac{2\sqrt{5}}{5}) = 27°$ par excès.