Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1$.

1/ Soit la suite u telle que $u_n = f(n)$, avec n entier naturel.

a) La suite u est-elle arithmétique, géométrique ?

$u_0 = f(0) = \dfrac{0}{2} + 1 = 1$, $u_1 = f(1) = \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$, $u_2 = f(2) = \dfrac{2}{2} + 1 = 2$.

On constate que $u_1 = 3u_0$ alors que $u_2 = \dfrac{2}{3}\, u_1$.

Ce contre exemple prouve que u n'est pas géométrique.

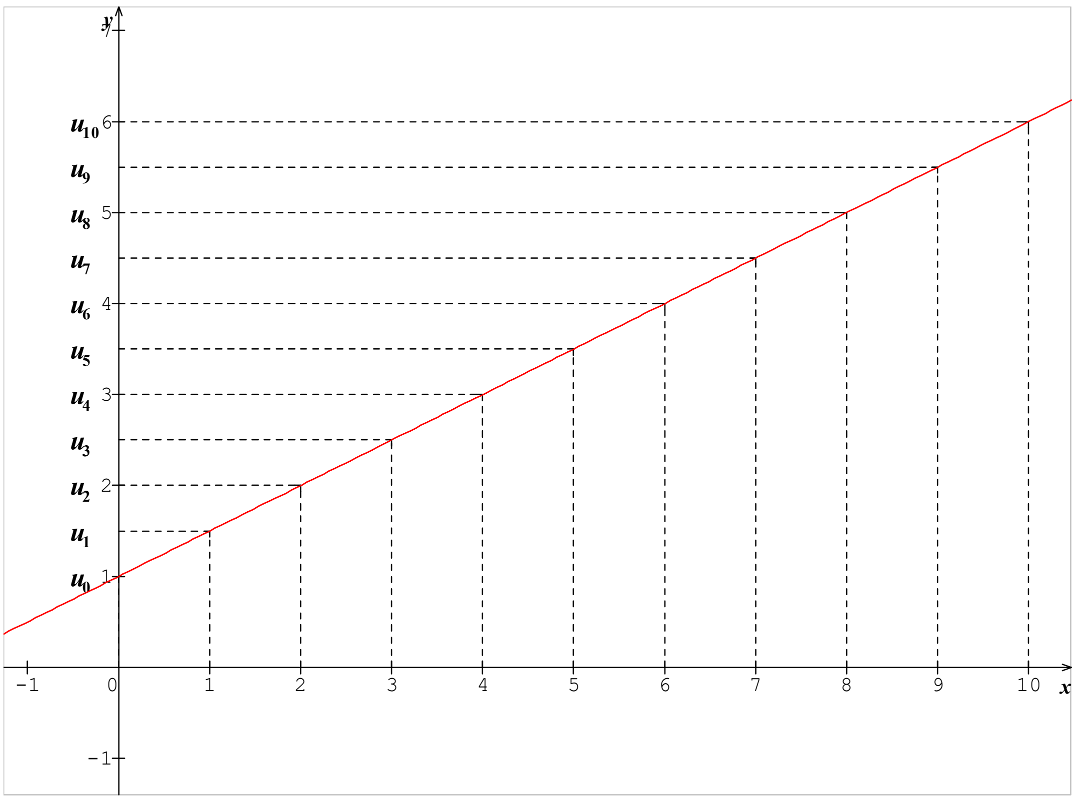
Par contre $u_1 = u_0 + \dfrac{1}{2}$ et $u_2 = u_1 + \dfrac{1}{2}$. On peut conjecturer que u est arithmétique, de raison $r = +\dfrac{1}{2}$.

Cette conjecture reste à démontrer en restant dans un cas général :

$u_{n+1} = f(n+1) = \dfrac{n+1}{2} + 1 = \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2} + 1 = \left(\dfrac{n}{2} + 1\right) + \dfrac{1}{2} = f(n) + \dfrac{1}{2}$, soit : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite u est bien arithmétique, de raison $r = +\dfrac{1}{2}$.

b) Tracer la courbe représentative de la fonction f et placer en ordonnée les valeurs u_n , pour n croissant de 0 à 10 .

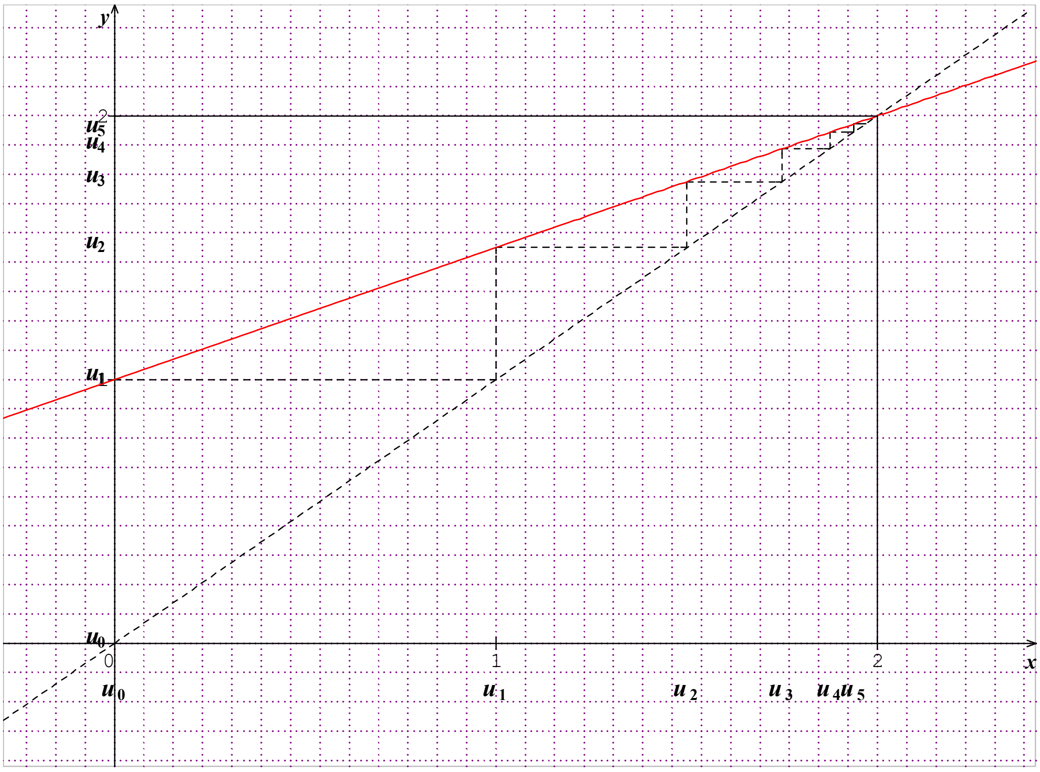


c) Conjecturer les propriétés de la suite u (sens de variation, limite).

On peut conjecturer et démontrer que la suite u est strictement croissante $(u_{n+1} > u_n)$, minorée par 1 , et telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2/ Soit la suite v telle que $v_{n+1} = f(v_n)$, avec n entier naturel, et $v_0 = 0$.

a) Tracer à nouveau la courbe représentative de la fonction f et placer en ordonnée et en abscisse les valeurs u_n , pour n croissant de 0 à 10 .



b) Conjecturer les propriétés de la suite u (sens de variation, limite).

On peut conjecturer et démontrer que la suite u est strictement croissante ($u_{n+1} > u_n$) , bornée par 0 et 2 , et telle que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +2$.