Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2 + 3u_n}$.

1/ Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

$$u_1 = \frac{2u_0}{2 + 3u_0} = \frac{2}{2+3} = +\frac{2}{5} \quad , \quad u_2 = \frac{2u_1}{2+3u_1} = \frac{\frac{4}{5}}{2+\frac{6}{5}} = \frac{4}{10+6} = +\frac{2}{8} = +\frac{1}{4} \quad , \quad u_3 = \frac{2u_2}{2+3u_2} = \frac{\frac{4}{8}}{2+\frac{6}{8}} = \frac{4}{16+6} = +\frac{2}{11} .$$

Remarque : $u_0 = 1 = \dfrac{2}{2+0\times3}$, $u_1 = \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{2+1\times3}$, $u_2 = \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{2+2\times3}$, $u_3 = \dfrac{2}{11} = \dfrac{2}{2+3\times3}$.

On peut conjecturer $u_n = \dfrac{2}{2+3n} = \dfrac{2}{3n+2}$.

2/ La suite u est-elle arithmétique ?

$u_1 - u_0 = \dfrac{2}{5} - 1 = -\dfrac{3}{5}$ et $u_2 - u_1 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{5} = -\dfrac{3}{20}$.

Les différences ne sont pas égales, donc ce *contre-exemple* prouve que la suite u n'est pas arithmétique.

3/ On suppose que pour tout entier naturel n , on a $u_n \neq 0$ et on définit la suite v telle que $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

Remarque : Sachant $u_0 = 1 > 0$ et le mode de construction de u étant $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2+3u_n}$,

il parait évident que dès que $u_n > 0$ on a également $u_{n+1} > 0$.

Tous les termes de la suite u_n sont donc strictement positifs, d'où l'existence de $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

a) Montrer que la suite v est arithmétique et donner ses éléments caractéristiques.

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{2+3u_n}{2u_n} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{(2+3u_n)-2}{2u_n} = \dfrac{3u_n}{2u_n} = +\dfrac{3}{2} = r$ raison d'une suite arithmétique.

Son premier terme est $v_0 = \dfrac{1}{u_0} = +1$.

b) Exprimer v_n en fonction de n .

On sait que si v est arithmétique : $v_n = v_0 + n.r$, soit $v_n = 1 + \dfrac{3}{2}.n = \dfrac{3n+2}{2}$.

c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

$v_n = \dfrac{1}{u_n} \Leftrightarrow u_n = \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{2}{3n+2}$, comme conjecturé précédemment.

4/ Etudier la monotonie de u .

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{3(n+1)+2} - \dfrac{2}{3n+2} = \dfrac{2}{3n+5} - \dfrac{2}{3n+2} = \dfrac{2(3n+2)-2(3n+5)}{(3n+2)(3n+5)} = -\dfrac{6}{(3n+2)(3n+5)} < 0$ dans $\mathbb{N}$.

La suite u est strictement décroissante.

5/ Montrer que, pour tout n élément de $\mathbb{N}$, On a $0 \leq u_n \leq 1$.

$u_n = \dfrac{2}{3n+2} \Rightarrow u_n > 0$ si $n \in \mathbb{N}$.

$u_n - 1 = \dfrac{2}{3n+2} - 1 = \dfrac{2-(3n+2)}{3n+2} = -\dfrac{3n}{3n+2} < 0$, or $u_n - 1 < 0 \Leftrightarrow u_n < 1$ si $n \in \mathbb{N}$.

On conclue : $0 < u_n < 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite u est *bornée* par 0 et 1.

Complément : Hors programme 1eS

La suite u est décroissante, ce qui signifie que chaque terme « pousse » le terme suivant u_{n+1} en dessous de lui, mais la suite u est également *minorée* par 0 qui bloque les valeurs u_n.

Il y a donc *accumulation* des valeurs de u_n lorsque n devient de plus en plus grand, vers une *limite* $L \geq 0$.

On dit qu'*une suite décroissante et minoirée par la valeur a , est convergente vers L* avec $L \geq a$.

Ici : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{3n+2} = 0$, limite de la suite u, ce que confirme le graphique ci-dessous.