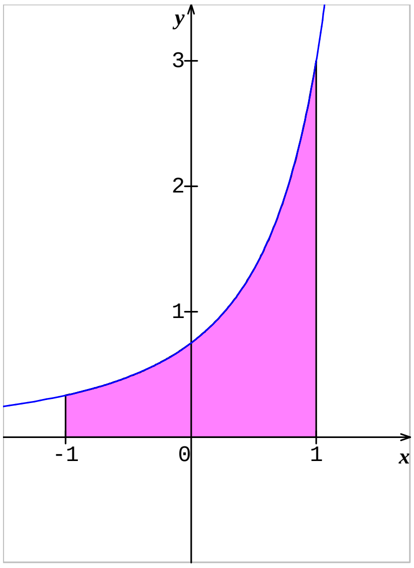
Soit $f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$, et C_f sa courbe représentative ci-dessous dans un repère orthonormé d'unités 1 cm.

Calculer l'aire hachurée.



Pour calculer l'aire indiquée, il faut s'assurer d'intégrer dans le sens positif de $a = -1$ à $b = +1$.

L'aire se mesure systématiquement entre deux fonctions, de la plus basse vers la plus haute, soit ici de $g(x) = 0$ (axe des abscisses) vers $f(x)$.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} f(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} \frac{3}{(x-2)^2}\, dx .$$

Remarque : Lors d'un calcul d'aire, l'écriture $\int_a^b f(x)\, dx$ sous-entend que l'aire est calculée entre C_f et l'axe des abscisses $x'x$.

Ne pas oublier d'écrire le terme dx , qui exprime qu'il y a un déplacement horizontal sur l'axe x'x.

Pour calculer cette aire, on cherche une primitive, sans constante additionnelle de la fonction f :

$$f(x) = \frac{3}{(x-2)^2} = 3\times\frac{1}{(x-2)^2} = 3\times\frac{u'}{u^2} \text{ avec } u = x - 2 \Rightarrow u' = 1 .$$

On sait que $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$, donc $f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2} = 3\times\dfrac{1}{(x-2)^2} = 3\times(-1)\times\left[-\dfrac{1}{(x-2)^2}\right] = -3\left(-\dfrac{u'}{u^2}\right) \Rightarrow F(x) = -3\times\dfrac{1}{u} = -\dfrac{3}{x-2}$.

$$A = \int_{-1}^{+1} f(x)\, dx = [F(x)]_{-1}^{+1} = F(+1) - F(-1) = \frac{-3}{1-2} - \frac{-3}{-1-2} = \frac{-3}{-1} - \frac{-3}{-3} = 3 - 1 = 2 \text{ unités d'aire.}$$

Chaque unité étant de longueur 1cm, on déduit que l'unité d'aire est égale à $u\times u' = 1\times 1 = 1\text{ cm}^2$.

Donc : $A = 3\, u\times u'\text{ cm}^2 = 3\text{ cm}^2$.