1/ Dériver $f(x) = e^{-5x} + 3e^{3x}$.

$(e^u)' = u'.e^u$, d'où : $f(x) = e^{-5x} + 3e^{3x} \Rightarrow f'(x) = -5e^{-x} + 3(3e^{3x}) = -5e^{-x} + 9e^{3x}$.

2-a) Dériver $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$.

$g = \left(\dfrac{u}{v}\right)' \Rightarrow g' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ et $(e^{-x})' = (-1)e^{-x} = -e^{-x}$.

$$g'(x) = \frac{(-e^{-x})(e^{-x} + 1) - (-e^{-x})(e^{-x})}{(e^{-x} + 1)^2} = \frac{-e^{-2x} - e^{-x} + e^{-x} - e^{-2x}}{(e^{-x} + 1)^2} = -\frac{2e^{-2x}}{(e^{-x} + 1)^2} .$$

On remarquera que l'on ne développe pas le dénominateur pour profiter de l'information du fait qu'il est positif.

Comme $e^{-x} > 0$ pour tout x réel, on déduit $g'(x) < 0$ pour tout x réel.

La fonction g est partout décroissante.

b) Démontrer que $\dfrac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} = \dfrac{1}{1 + e^x}$.

<u>1re méthode</u> :

On sait que $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, donc $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

$$\frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{e^x.\frac{1}{e^x}}{e^x(\frac{1}{e^x} + 1)} = \frac{\frac{e^x}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x} + e^x} = \frac{1}{1 + e^x} .$$

<u>2ème méthode</u> : Effectuons un produit en croix.

$$\frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} = \frac{1}{1 + e^x} \Leftrightarrow e^{-x}(1 + e^x) = 1(e^{-x} + 1) \Leftrightarrow e^{-x} + e^{-x + x} = e^{-x} + 1 \Leftrightarrow e^{-x} + e^0 = e^{-x} + 1 ,$$

Sachant $e^0 = 1$, on obtient : $e^{-x} + 1 = e^{-x} + 1$, ce qui prouve l'égalité initiale.