Calculer les dérivées des fonctions suivantes, après en avoir donné le domaine de définition :

a) $f(x) = xe^{2x}$ **.**

e^a est défini pour tout a réel, donc f définie sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs $(e^u)' = u'e^u \Rightarrow (e^{2x})' = 2e^{2x}$.

$(uv)' = u'v + v'u \Rightarrow (xe^{2x})' = 1.e^{2x} + x.(2)e^{2x} = (2x + 1)e^{2x}$.

b) $g(x) = xe^{-x^2}$ **.**

e^a est défini pour tout a réel, donc g définie sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs $(e^u)' = u'e^u \Rightarrow (e^{-x^2})' = -2x.\, e^{-x^2}$.

$(uv)' = u'v + v'u \Rightarrow (xe^{-x^2})' = 1.\, e^{-x^2} + x.(-2x)\, e^{-x^2} = (1 - 2x^2)\, e^{-x^2}$.

c) $h(x) = (e^x - e^{-x})^2$ **.**

e^x et e^{-x} sont définis pour tout x réel, donc h définie sur $\mathbb{R}$.

<u>1ère méthode</u> : Sans développer (meilleur).

On sait $(U^2)' = 2U.U'$ et $(e^u)' = u'e^u$.

$h(x) = (e^x - e^{-x})^2 \Rightarrow h'(x) = 2(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})' = 2(e^x - e^{-x})(e^x - (-1)e^{-x}) = 2(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})$.

On peut compléter en utilisant $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$.

$h'(x) = 2(e^{2x} - e^{-2x})$.

<u>2ème méthode</u> : En développant.

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow h(x) = (e^x - e^{-x})^2 = (e^x)^2 - 2(e^x)(e^{-x}) + (e^{-x})^2$.

On sait : $e^a \times e^b = e^{a+b}$ et $(e^a)^b = e^{a \times b}$.

$h(x) = (e^x - e^{-x})^2 = (e^x)^2 - 2(e^x)(e^{-x}) + (e^{-x})^2 = e^{2x} - 2e^{x-x} + e^{-2x} = e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x}$, avec $e^0 = 1$.

$h(x) = e^{2x} - 2 + e^{-2x} \Rightarrow h'(x) = 2e^{2x} - 0 + (-2)e^{-2x} = 2e^{2x} - 2e^{-2x} = 2(e^{2x} - e^{-2x})$.

d) $k(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{x}$ **.**

On sait $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

$k(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{x} \Rightarrow k'(x) = \dfrac{(e^x + e^{-x})'.x - 1.\,(e^x + e^{-x})}{x^2} = \dfrac{[e^x + (-1)e^{-x}].x - (e^x + e^{-x})}{x^2} = \dfrac{(e^x - e^{-x}).x - (e^x + e^{-x})}{x^2}$,

$k'(x) = \dfrac{(x-1)e^x - (x+1)e^{-x}}{x^2}$.

Autre présentation, en multipliant le numérateur et le dénominateur par e^x :

$k'(x) = \dfrac{(x-1)e^{2x} - (x+1)}{x^2e^x}$, ou encore : $k'(x) = \dfrac{x(e^{2x} - 1) - (e^{2x} + 1)}{x^2e^{2x}}$.