

Calculer les dérivées des fonctions suivantes, après en avoir donné le domaine de définition :

a) $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

$e^x > 0$ pour tout x réel $\Rightarrow e^x + 1 > 1$, donc jamais nul. La fraction existe pour tout x réel, soit $D_f = \mathbb{R}$.

$$f = \frac{u}{v} \Rightarrow f' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \text{ avec } (e^x)' = e^x.$$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

Sachant $e^x > 0$, pour tout x réel, on déduit $f'(x) > 0$, soit f partout *strictement croissante*.

b) $g(x) = 3e^{2x} - e^{-x}$.

e^u est défini pour tout u réel, donc $g(x)$ définie pour tout x réel, soit $D_g = \mathbb{R}$.

$$\text{On sait : } (e^u)' = u' \cdot e^u, \text{ d'où : } \begin{cases} (e^{2x})' = 2e^{2x} \\ (e^{-x})' = (-1)e^{-x} = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\text{D'où : } g'(x) = 3(2e^{2x}) - (-e^{-x}) = 6e^{2x} + e^{-x}.$$

Sachant $e^u > 0$, pour tout x réel, on déduit $g'(x) > 0$, soit g partout *strictement croissante*.

c) $h(x) = \frac{1}{1 - e^{-2x}}$.

$h(x)$ est partout définie, sauf si $1 - e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} = 1$.

On sait que $e^A = 1 \Leftrightarrow A = 0$, soit ici $-2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, valeur interdite. Donc : $D_h = \mathbb{R} - \{0\}$.

$$\text{On sait } \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \text{ et } (e^{-2x})' = -2e^{-2x}, \text{ d'où : } h'(x) = -\frac{-2e^{-2x}}{(1 - e^{-2x})^2} = \frac{2e^{-2x}}{(1 - e^{-2x})^2}.$$

Sachant $e^u > 0$, pour tout x réel, on déduit $h'(x) > 0$, soit h partout *strictement croissante*.