Soit l'équation $E_m : x^2 + mx + (m-1) = 0$, pour tout m et tout x réels.
Déterminer m pour que E_m admette deux racines, dont l'une soit double de l'autre.

Soit x_1 et x_2 les deux éventuelles racines de E_m . On doit imposer $x_2 = 2x_1$.

On sait que la somme des racines de $ax^2 + bx + c = 0$ est $S = -\frac{b}{a}$.

D'où : $S = x_1 + x_2 = -m$, soit $3x_1 = -m \Leftrightarrow x_1 = -\frac{m}{3}$.

Interprétation : E_m ne peut admettre deux racines dont l'une est double de l'autre, que si une des racines est $-\frac{m}{3}$.

Recherchons quelle équation E_m admet $x = -\frac{m}{3}$ pour racine :

$$\left(-\frac{m}{3}\right)^2 + m\left(-\frac{m}{3}\right) + (m-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{m^2}{9} - \frac{m^2}{3} + m - 1 = 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 9m - 9 = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 9m + 9 = 0 .$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 81 - 72 = 9 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9-3}{4} = +\dfrac{3}{2} \\ m_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9+3}{4} = +3 \end{cases} .$$

Donc : Les seules équations E_m dont les racines soient doubles l'une de l'autre sont $E_{3/2}$ et E_3 .

Vérification :

$E_{3/2}$: $x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$ admet $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = -1$ pour racines ($x_2 = 2x_1$) .

E_3 : $x^2 + 3x + 2 = 0$ admet $x_1 = -1$ et $x_2 = -2$ pour racines ($x_2 = 2x_1$) .