Soit f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ et $g(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$.

1/ Sans calculer leurs dérivées, prouver que $f'(x) = g'(x)$ pour tout x réel.

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2(x)\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{2x}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\ .$$

On déduit : $g(x) = f(x) + 2$, d'où : $g'(x) = f'(x)$ pour tout x réel.

2/ Calculer $f'(x)$.

On va calculer les deux dérivées, même de deux façons différentes pour $f'(x)$.

Bien entendu, on peut remettre chacune d'elles au même dénominateur, mais ce n'est pas très élégant.

On sait que $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -1/x^2 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$, d'où : $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 2x - \dfrac{2x}{x^4} = 2x - \dfrac{2}{x^3} = 2\left(x - \dfrac{1}{x^3}\right)$.

On peut aussi utiliser exposants *fractionnaires* : $(x^p)' = p.x^{p-1}$, pour tout $p \in \mathbb{Q} - \{0\}$.

Comme $\dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$, on déduit $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2} = x^2 + x^{-2} \Rightarrow f'(x) = 2x + (-2).x^{-2-1} = 2x - 2x^{-3} = 2x - \dfrac{2}{x^3} = 2\left(x - \dfrac{1}{x^3}\right)$.

$$f'(x) = 2\left(x - \frac{1}{x^3}\right) = 2.\frac{x^4 - 1}{x^3} = 2.\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^3} = 2.\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^3}\ .$$

On sait que $(x^2)' = 2x \Rightarrow (u^2)' = 2u.u'$, d'où : $g(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 \Rightarrow g'(x) = 2\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(x + \dfrac{1}{x}\right)' = 2\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$,

$$g'(x) = 2.\frac{x^2+1}{x} \times \frac{x^2-1}{x^2} = 2.\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^3}\ .$$