Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 + x + 1}}$

Domaine de définition : $x^2 + x + 1$ admet $\Delta = b^2 - 4ac = -3 < 0$ pour discriminant.

Le trinôme n'est jamais nul, donc $D_f = \mathbb{R}$.

Tout rapport de polynômes est dérivable sur son domaine de définition, soit sur $\mathbb{R}$.

$f = \dfrac{u}{v} \Rightarrow f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, soit : $f'(x) = \dfrac{2(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(2x - 3)}{(x^2 + x + 1)^2} = \dfrac{-2x^2 + 6x + 5}{(x^2 + x + 1)^2}$.

b) $\boldsymbol{g(x) = (x^2 + x + 1)(2x - 3)}$

Tout produit de polynômes est dérivable sur son domaine de définition, soit sur $\mathbb{R}$.

$g = u.v \Rightarrow g' = u'v + uv'$, soit : $g'(x) = (2x + 1)(2x - 3) + (x^2 + x + 1)(2) = 6x^2 - 2x - 1$.

Remarque :

Dans cet exemple simple, il était presque plus simple de développer $g(x)$ *avant de dériver* :

$g(x) = (x^2 + x + 1)(2x - 3) \Rightarrow g(x) = 2x^3 - x^2 - x - 3$, d'où : $g'(x) = 6x^2 - 2x - 1$.

Il en serait autrement avec $g(x) = (x^2 + x + 1)(2x - 3)^3$, trop long à développer.

c) $\boldsymbol{h(x) = x^2.\cos x}$

Cette fonction est donnée comme exemple où la formule $(u.v)' = u'v + v'u$ est indispensable.

Pour information : $(\cos x)' = -\sin x$.

D'où : $h(x) = x^2.\cos x \Rightarrow h'(x) = (2x).\cos x + (-\sin x)(x^2) = 2x.\cos x - x^2.\sin x$.

$h'(x) = x(2.\cos x - x.\sin x)$.