Soit f la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$.

1/ Soit h un nombre réel non nul.

Montrer que le taux d'accroissement de f entre 4 et $4 + h$ est égal à $\dfrac{4}{2\sqrt{4+h}+4}$.

$$T_{4\,;\,4+h} = \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \frac{(2\sqrt{4+h}-1)-(2\sqrt{4}-1)}{h} = \frac{2\sqrt{4+h}-4}{h}\ .$$

On utilise la *quantité conjuguée* du numérateur : $T_{4\,;\,4+h} = \dfrac{(2\sqrt{4+h}-4)(2\sqrt{4+h}+4)}{h(2\sqrt{4+h}+4)}$,

$$T_{4\,;\,4+h} = \frac{(2\sqrt{4+h})^2-4^2}{h(2\sqrt{4+h}+4)} = \frac{4(4+h)-16}{h(2\sqrt{4+h}+4)} = \frac{4h}{h(2\sqrt{4+h}+4)} = \boldsymbol{\frac{4}{2\sqrt{4+h}+4}} = \frac{2}{\sqrt{4+h}+2}\ .$$

L'intérêt de l'utilisation de la <u>quantité conjuguée</u> est de supprimer la racine du numérateur, tout en conservant la valeur globale de la fraction, et ainsi permettre la simplification par h .

2/ En déduire la valeur de $f'(4)$.

On fait tendre h vers 0 jusqu'à se confondre avec cette valeur, d'où : $f'(4) = \dfrac{2}{\sqrt{4}+2} = \dfrac{2}{4} = +\dfrac{1}{2}$.

Vérification par la formule de dérivation :

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $(1)' = 0$, d'où : $f(x) = 2\sqrt{x} - 1 \Rightarrow f'(x) = 2\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

On déduit : $f'(4) = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = +\dfrac{1}{2}$.