1/ Ecrire sans utiliser la notation *valeur absolue* : $3|2x-6|-5|-3x-9|$.

Le but d'une *valeur absolue* est de rendre positif (ou nul) le terme dont elle prend la valeur absolue.

$\begin{cases} A \geq 0 \Leftrightarrow |A| = A \\ A < 0 \Leftrightarrow |A| = -A \end{cases}$. On remarque que $A < 0$ a pour conséquence $-A > 0$.

Pour commencer, il serait judicieux de factoriser au maximum les binômes situés dans les valeurs absolues, afin de mieux mettre en évidence les binômes concernés et d'éventuelles factorisations :

On sait que $|A \times B| = |A| \times |B|$, d'où :

$3|2x-6|-5|-3x-9| = 3|2(x-3)|-5|-3(x+3)| = 3\times|2|\times|x-3|-5\times|-3|\times|x+3|$,

$3|2x-6|-5|-3x-9| = 3\times2\times|x-3|-5\times3\times|x+3| = 6|x-3|-15|x+3|$.

x	$-\infty$		-3		$+3$		$+\infty$
$x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\|x-3\|$		$-x+3$	|	$-x+3$	0	$x-3$	
$\|x+3\|$		$-x-3$	0	$x+3$	|	$x+3$	

a) Si $x \leq -3$: $3|2x-6|-5|-3x-9| = 6(-x+3)-15(-x-3) = 9x+63 = 9(x+7)$.

b) Si $-3 < x \leq +3$: $3|2x-6|-5|-3x-9| = 6(-x+3)-15(x+3) = -21x-27 = -3(7x+9)$.

c) Si $x > +3$: $3|2x-6|-5|-3x-9| = 6(x-3)-15(x+3) = -9x-63 = -9(x+7)$.

2/ Déduire les solutions de l'équation $3|2x-6|-5|-3x-9| = 10$.

Il faut résoudre dans chacun des sous-intervalles précédents, en vérifiant si la solution appartient ou non à cet intervalle :

a) Si $x \leq -3$: $3|2x-6|-5|-3x-9| = 10 \Leftrightarrow 9x+63 = 10 \Leftrightarrow 9x = -53 \Leftrightarrow x = -\frac{53}{9} \approx -5{,}89$ (valable).

b) Si $-3 < x \leq +3$: $3|2x-6|-5|-3x-9| = 10 \Leftrightarrow -21x-27 = 10 \Leftrightarrow -21x = -37 \Leftrightarrow x = +\frac{37}{21} \approx +1{,}76$ (valable) .

c) Si $x > +3$: $3|2x-6|-5|-3x-9| = 10 \Leftrightarrow -9x-63 = 10 \Leftrightarrow -9x = +73 \Leftrightarrow x = -\frac{73}{9}$ (non valable).

On conclue : $S = \{-\frac{53}{9} ; +\frac{37}{21}\}$.

3/ Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3|2x-6|-5|-3x-9| \leq 7$.

Il faut également résoudre dans chacun des sous-intervalles précédents, en limitant chaque intervalle solution à son intersection avec le sous-intervalle de définition correspondant au cas étudié :

a) Si $x \leq -3$: $3|2x-6|-5|-3x-9| \leq 7 \Leftrightarrow 9x+63 \leq 7 \Leftrightarrow 9x \leq -56 \Leftrightarrow x \leq -\frac{56}{9} \approx -6{,}2$.

1ère zone solution : $S_1 =]-\infty ; -\frac{56}{9}]$.

b) Si $-3 < x \leq +3$: $3|2x-6|-5|-3x-9| \leq 7 \Leftrightarrow -21x-27 \leq 7 \Leftrightarrow -21x \leq 34 \Leftrightarrow x \geq -\frac{34}{21} \approx -1{,}62$.

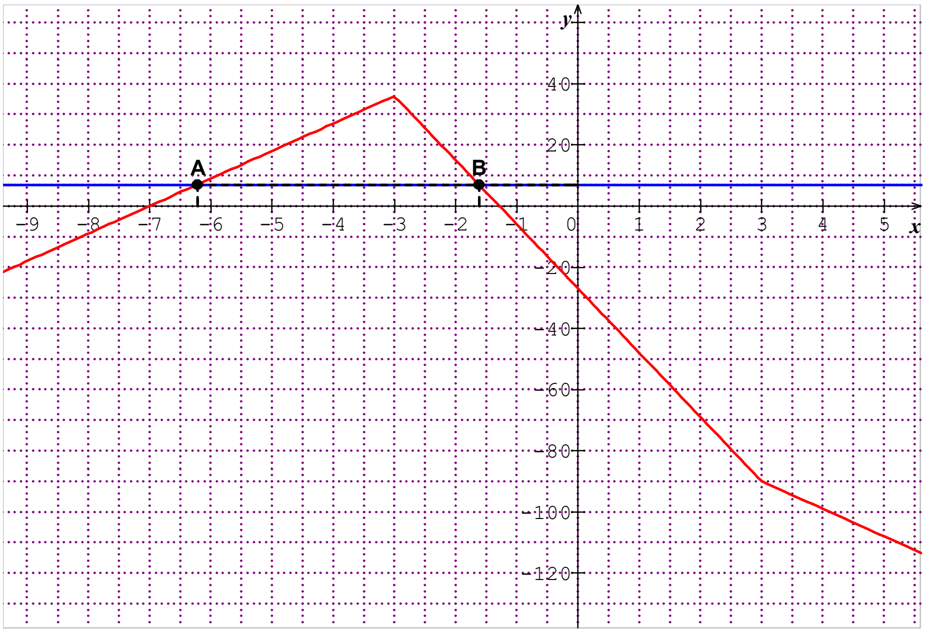
2ème zone solution : $S_2 = [-\frac{34}{21} ; +3[$.

c) Si $x > +3$: $3|2x - 6| - 5|-3x - 9| \leq 7 \Leftrightarrow -9x - 63 \leq 7 \Leftrightarrow -9x \leq +70 \Leftrightarrow x \leq -\frac{70}{9} \approx -7{,}78$.

3ème zone solution : $S_3 = \varnothing$.

Conclusion : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left]-\infty \,;\, -\frac{56}{9}\right] \cup \left[-\frac{34}{21} \,;\, +3\right[$.

<u>Vérification graphique</u> :



La zone solution est la réunion de celle avant le point A et celle après le point B .

On remarquera que la courbe représentative est constituée des 3 droites affines :

$$\begin{cases} y = 9x + 63 \text{ jusqu'à } -3 \\ y = -21x\ \ 27 \text{ de } -3 \text{ à } +3 \\ y = -9x - 63 \text{ après } +3 \end{cases}$$

Aux points de changement de droites affine, la <u>continuité</u> de la fonction est conservée car le terme qui change dans l'écriture de $y = 3|2x - 6| - 5|-3x - 9|$ *lorsque* x *traverse* -3 *puis* $+3$ *, change lorsqu'il vaut* 0 (se référer au tableau ci-dessus).