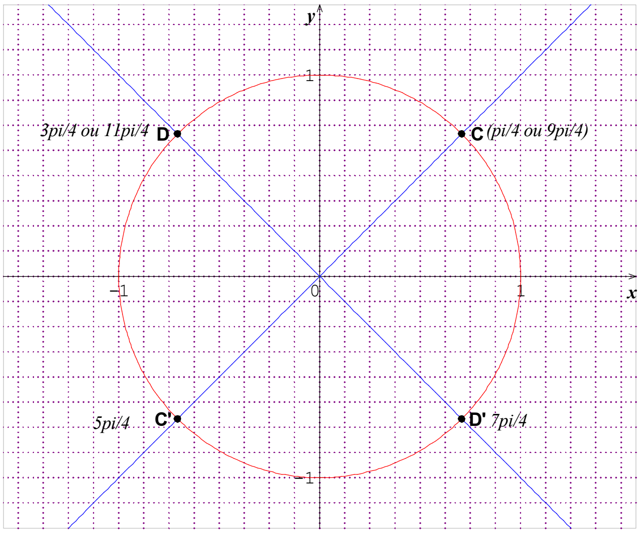
Calculer les nombres A et B :

$\boldsymbol{A = \cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4} + \cos\frac{9\pi}{4} + \cos\frac{11\pi}{4}}$.

On peut conjecturer le résultat en regardant le cercle trigonométrique (en se souvenant éventuellement que $\cos\frac{\pi}{4} = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$).



Le point C du cercle trigonométrique est d'angle polaire $\frac{\pi}{4} = 45°$ (sur la 1ère bissectrice des axes).

Son abscisse est de valeur $\cos\frac{\pi}{4} = +\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Le point D, symétrique de C par rapport avec l'axe $y'y$, est d'angle polaire $\frac{3\pi}{4} = 135°$,

d'abscisse $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, soit $\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Le point C', symétrique de C par rapport avec l'origine O, est d'angle polaire $\frac{5\pi}{4} = 225°$,

d'abscisse $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, soit $\cos\frac{5\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Le point D', symétrique de C par rapport avec l'axe $x'x$, est d'angle polaire $\frac{7\pi}{4} = 315°$,

d'abscisse $\cos\frac{7\pi}{4} = +\frac{\sqrt{2}}{2}$, soit $\cos\frac{7\pi}{4} = +\cos\frac{\pi}{4} = +\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Par ailleurs, $\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi \Rightarrow \cos\frac{9\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = +\frac{\sqrt{2}}{2}$ (deux angles différant de 2π ont même cosinus).

De même : $\frac{11\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi \Rightarrow \cos\frac{11\pi}{4} = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On peut donc conjecturer : $A = \cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4} + \cos\frac{9\pi}{4} + \cos\frac{11\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Démonstration rigoureuse On sait :

$\cos(\pi - a) = -\cos a$, d'où : $\cos\dfrac{3\pi}{4} = \cos(\pi - \dfrac{\pi}{4}) = -\cos\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\cos(\pi + a) = -\cos a$, d'où : $\cos\dfrac{5\pi}{4} = \cos(\pi + \dfrac{\pi}{4}) = -\cos\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\cos(-a) = \cos(2\pi - a)$, d'où : $\cos\dfrac{7\pi}{4} = \cos(2\pi - \dfrac{\pi}{4}) = \cos\dfrac{\pi}{4} = +\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\cos(2\pi + a) = \cos a$, d'où : $\begin{cases} \cos\dfrac{9\pi}{4} = \cos(2\pi + \dfrac{\pi}{4}) = \cos\dfrac{\pi}{4} = +\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\dfrac{11\pi}{4} = \cos(2\pi + \dfrac{3\pi}{4}) = -\cos\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

$A = \cos\dfrac{3\pi}{4} + \cos\dfrac{5\pi}{4} + \cos\dfrac{7\pi}{4} + \cos\dfrac{9\pi}{4} + \cos\dfrac{11\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\boldsymbol{B = \sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{7\pi}{4} + \sin\frac{11\pi}{8} + \sin\frac{15\pi}{8}}$ **.**

On sait que $\sin(2\pi + a) = \sin a$ et que $\sin(-a) = -\sin a$.

Donc : $\sin(-\dfrac{\pi}{8}) = -\sin\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{15\pi}{8} = \sin(-\dfrac{\pi}{8} + 2\pi) = \sin(-\dfrac{\pi}{8}) = -\sin\dfrac{\pi}{8}$.

De même : $\sin\dfrac{11\pi}{8} = \sin(\pi + \dfrac{3\pi}{8}) = \sin(-\dfrac{3\pi}{8}) = -\sin\dfrac{3\pi}{8}$.

En conséquence :

$B = \sin\dfrac{\pi}{8} + \sin\dfrac{3\pi}{8} + \sin\dfrac{7\pi}{4} + \sin\dfrac{11\pi}{8} + \sin\dfrac{15\pi}{8} = \left(\sin\dfrac{\pi}{8} + \sin\dfrac{15\pi}{8}\right) + \left(\sin\dfrac{3\pi}{8} + \sin\dfrac{11\pi}{8}\right) + \sin\dfrac{7\pi}{4}$,

$B = \left(\sin\dfrac{\pi}{8} - \sin\dfrac{\pi}{8}\right) + \left(\sin\dfrac{3\pi}{8} - \sin\dfrac{3\pi}{8}\right) + \sin\dfrac{7\pi}{4} = \sin\dfrac{7\pi}{4}$.

$B = \sin\dfrac{7\pi}{4} = \sin\left(2\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin(-\dfrac{\pi}{4}) = -\sin\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.